

Funciones inversas (segunda parte)

viernes, 21 de enero de 2022

① Teorema. Si F es continua e inyectiva en un intervalo, entonces F es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en dicho intervalo.

② Teorema. Si F es estrictamente creciente (decreciente), entonces F^{-1} también lo es.

Teorema. Si F es continua e inyectiva en un intervalo, entonces F^{-1} también es continua.

Demostración. Consideremos primero el caso en el que el intervalo es abierto. Por el Teorema ① sabemos que F es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el intervalo.

Supongamos que $F: I \rightarrow F(I)$ es estrictamente creciente

Sean $b \in F(I)$ y $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0 \forall y \in F(I) (|y - b| < \delta \Rightarrow |F^{-1}(y) - F^{-1}(b)| < \varepsilon)$

Como $b \in F(I)$, existe $a \in I$ tal que $F(a) = b \Rightarrow a = F^{-1}(b)$.

Dado que I es abierto, podemos suponer que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$.

Definimos $\delta = \min \{ F(a + \varepsilon) - b, b - F(a - \varepsilon) \}$

Como F es estrictamente creciente

$\Rightarrow F(a + \varepsilon) - b > 0$ y $b - F(a - \varepsilon) > 0$

$\Rightarrow \delta > 0$.

Además, $\delta \leq F(a + \varepsilon) - b \Rightarrow b + \delta \leq F(a + \varepsilon)$

$\delta \leq b - F(a - \varepsilon) \Rightarrow F(a - \varepsilon) \leq b - \delta$

Sea $y \in F(I)$ t.q. $|y - b| < \delta$

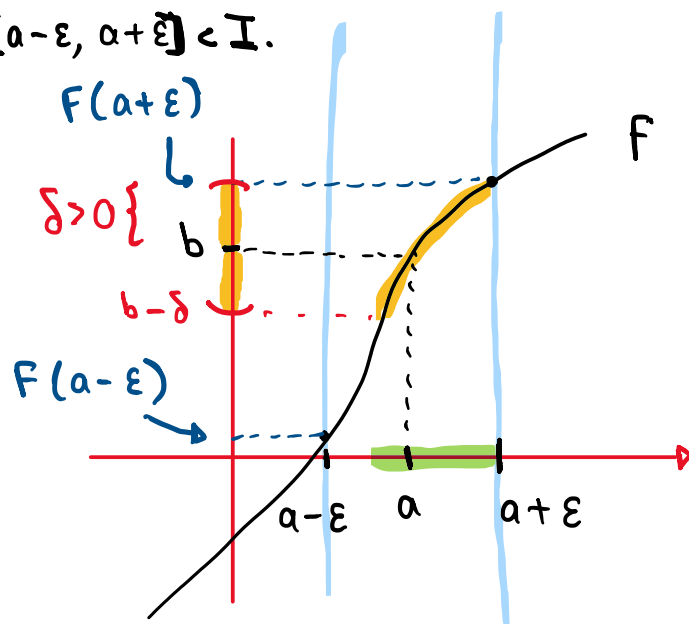
$\Rightarrow -\delta < y - b < \delta$

$\Rightarrow F(a - \varepsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq F(a + \varepsilon)$

$\Rightarrow F(a - \varepsilon) < y < F(a + \varepsilon)$

$\Rightarrow a - \varepsilon < F^{-1}(y) < a + \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < F^{-1}(y) - a < \varepsilon$



(Por el Teo. ②, F^{-1} también es estrictamente creciente).

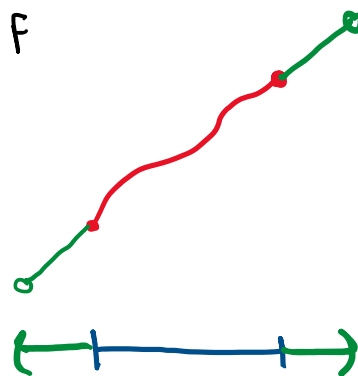
$$\Rightarrow |F^{-1}(y) - a| < \varepsilon \Rightarrow |F^{-1}(y) - F^{-1}(b)| < \varepsilon.$$

$\therefore F^{-1}$ es continua en b para cada $b \in F(I)$.

Si I no es abierto, podemos extender la función F a un intervalo abierto J tal que $I \subseteq J$

$\Rightarrow F^{-1}$ es continua en $F(J)$

$\Rightarrow F^{-1}$ es continua en $F(I)$.



Finalmente, si F es estrictamente decreciente ↘

$\Rightarrow -F$ es estrictamente creciente ↗

$\Rightarrow (-F)^{-1}$ es continua.

$\Rightarrow -F^{-1}$ es continua $\Rightarrow F^{-1}$ es continua.

$$(-F)^{-1} = -F^{-1}$$

Otra demostración:

Supongamos ahora que $F: I \rightarrow F(I)$ es estrictamente decreciente

Sean $b \in F(I)$ y $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0$ $\forall y \in F(I)$ ($|y - b| < \delta \Rightarrow |F^{-1}(y) - F^{-1}(b)| < \varepsilon$)

Como $b \in F(I)$, existe $a \in I$ tal que $F(a) = b \Rightarrow a = F^{-1}(b)$.

Dado que I es abierto, podemos suponer que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset I$.

Definimos $\delta = \min \{ F(a - \varepsilon) - b, b - F(a + \varepsilon) \}$ $F(a + \varepsilon)$

Como F es estrictamente decreciente

$\Rightarrow F(a - \varepsilon) - b > 0$ y $b - F(a + \varepsilon) > 0$

$\Rightarrow \delta > 0$.

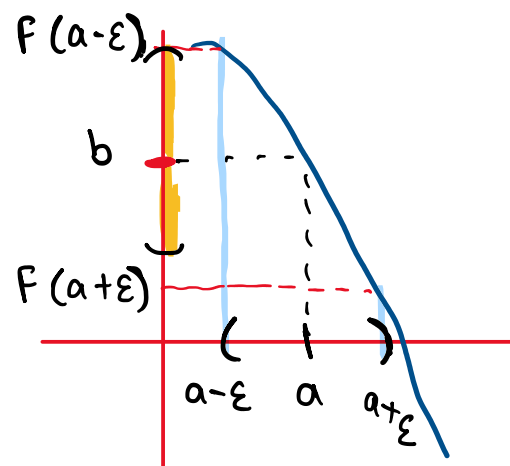
Además, $\delta \leq F(a - \varepsilon) - b \Rightarrow b + \delta \leq F(a - \varepsilon)$

$\delta \leq b - F(a + \varepsilon) \Rightarrow F(a + \varepsilon) \leq b - \delta$

Sea $y \in F(I)$ t.q. $|y - b| < \delta$

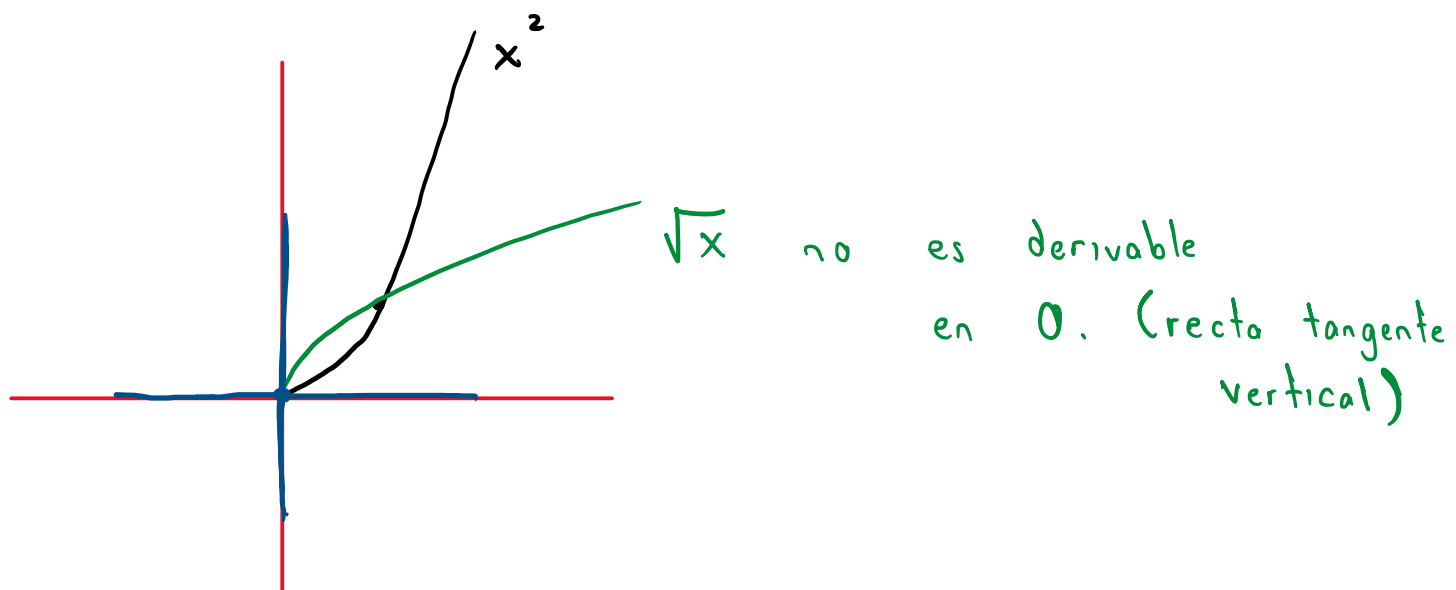
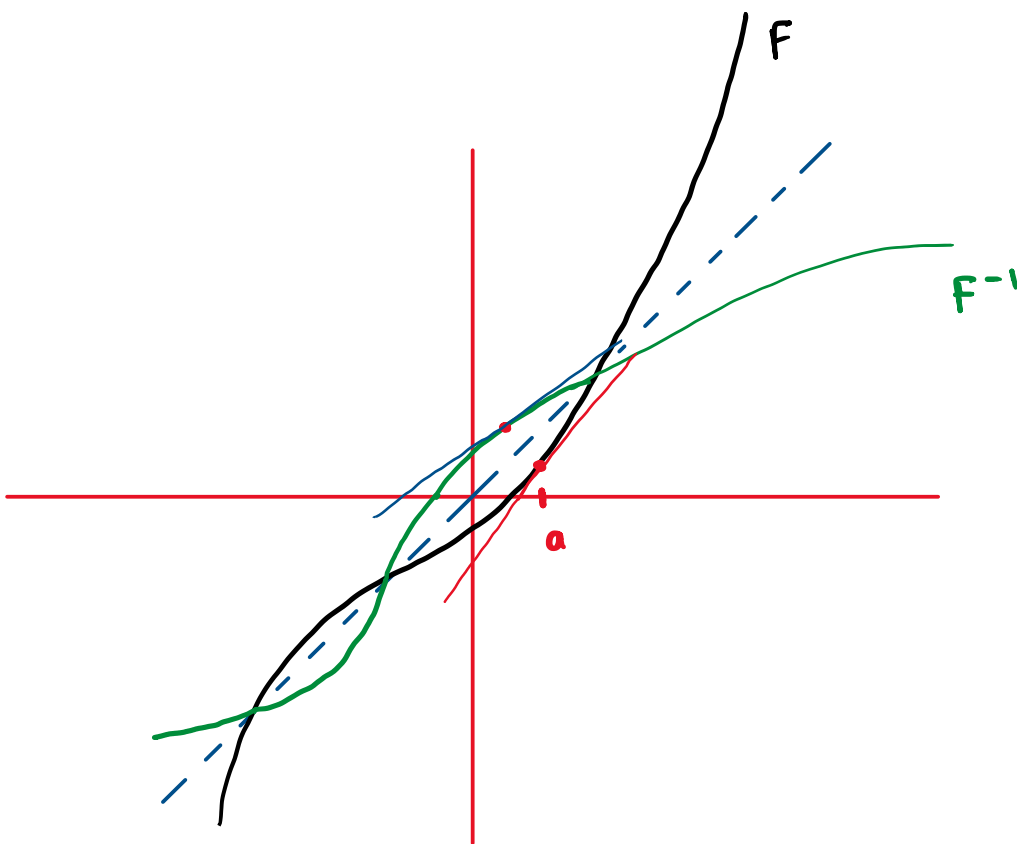
$\Rightarrow -\delta < y - b < \delta$

$\Rightarrow F(a + \varepsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq F(a - \varepsilon)$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(a+\varepsilon) < y < F(a-\varepsilon) \\
&\Rightarrow a+\varepsilon > F^{-1}(y) > a-\varepsilon \quad (\text{Por el Teo. 2), } F^{-1} \text{ también es estrictamente decreciente).} \\
&\Rightarrow -\varepsilon < F^{-1}(y) - a < \varepsilon \\
&\Rightarrow |F^{-1}(y) - a| < \varepsilon \Rightarrow |F^{-1}(y) - F^{-1}(b)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\therefore F^{-1}$ es continua en b para cada $b \in F(I)$.



Teorema. Sea $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva definida en un intervalo.
 Si $b \in F(I)$ y $F'(F^{-1}(b)) = 0$, entonces F^{-1} no es derivable en b .

Equivalentemente,

si $a \in I$ y $F'(a) = 0$, entonces F^{-1} no es derivable en $F(a)$.

Demostración.

Sup. que F^{-1} sí es derivable en b .

$F'(a) = 0$

Notemos que $\text{Id} = F \circ F^{-1}$

$$\Rightarrow \text{Id}'(b) = (F \circ F^{-1})'(b)$$

$$\Rightarrow 1 = F'(F^{-1}(b)) \cdot (F^{-1})'(b)$$

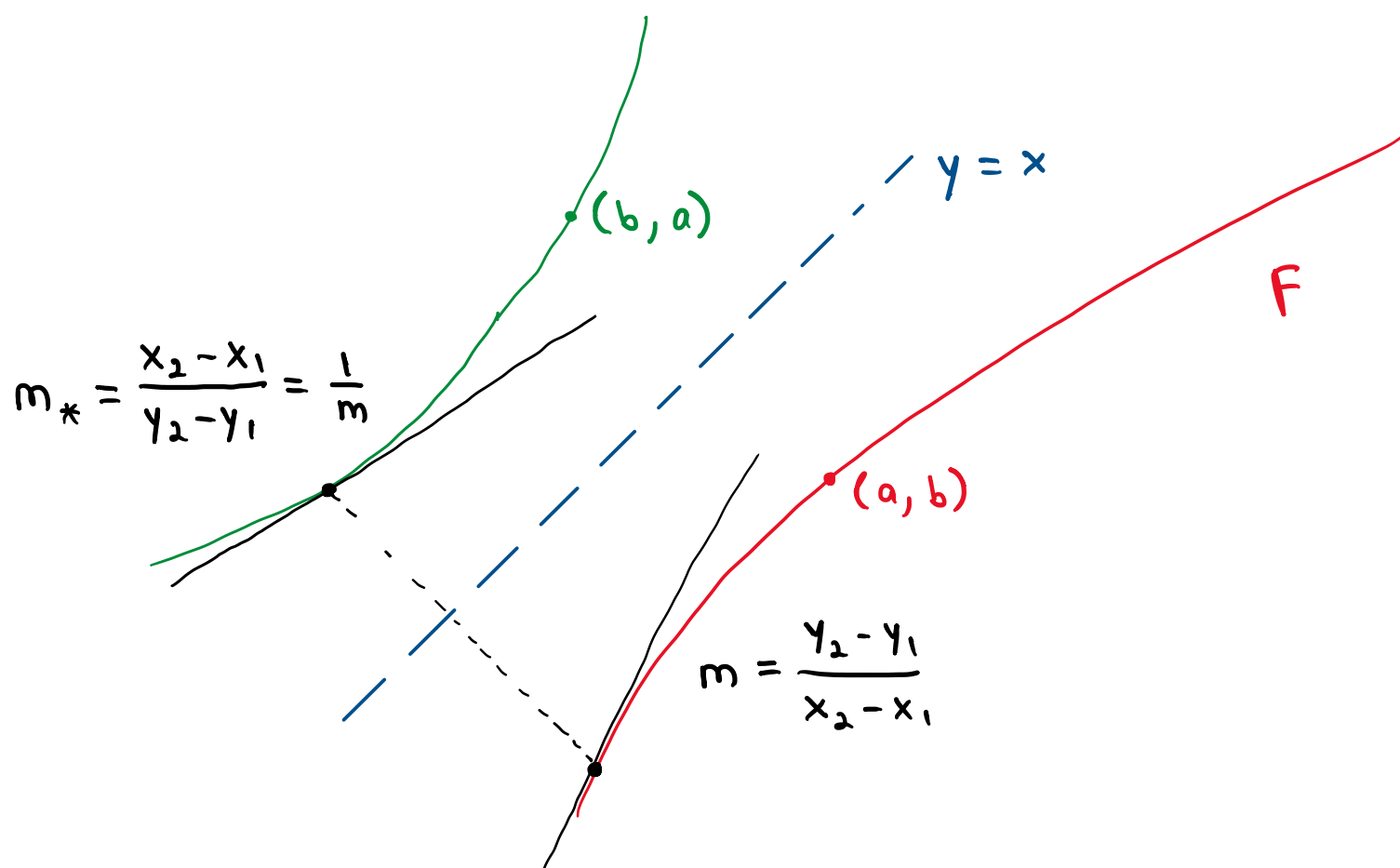
$$\Rightarrow 1 = 0 \cdot (F^{-1})'(b)$$

$$\Rightarrow 1 = 0 \quad \therefore F^{-1} \text{ no es derivable en } b$$

* Si F^{-1} es derivable en b y $F'(F^{-1}(b)) \neq 0$, entonces

$$1 = F'(F^{-1}(b)) \cdot (F^{-1})'(b)$$

$$\Rightarrow (F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(F^{-1}(b))}$$



Teorema. (Derivada de la Función Inversa)

Sea $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva definida en un intervalo.

Si $b \in F(I)$ y $F'(F^{-1}(b)) \neq 0$, entonces F^{-1} es derivable en b y

$$(F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(F^{-1}(b))}.$$

Demostración

Sean $b \in F(I)$ y $a \in I$ t.q. $F(a) = b \Rightarrow a = F^{-1}(b)$.

Por definición,

$$(F^{-1})'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^{-1}(b+h) - F^{-1}(b)}{h}$$

Para cada $h \neq 0$, como $b+h \neq b$

$$\Rightarrow F^{-1}(b+h) \neq F^{-1}(b) = a$$

$\Rightarrow F^{-1}(b+h) \neq a \Rightarrow$ existe $k \neq 0$ tal que

$$F^{-1}(b+h) = a+k \quad (K = F^{-1}(b+h) - a)$$

$$\Rightarrow b+h = F(a+k)$$

$$\Rightarrow h = F(a+k) - b = F(a+k) - F(a)$$

$$\Rightarrow (F^{-1})'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+k - a}{F(a+k) - F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{F(a+k) - F(a)}{k}}$$

(K depende de h)

Recordemos que $K = F^{-1}(b+h) - F^{-1}(b)$.

Como F es derivable en $F^{-1}(b) \Rightarrow F$ es continua en $F^{-1}(b)$

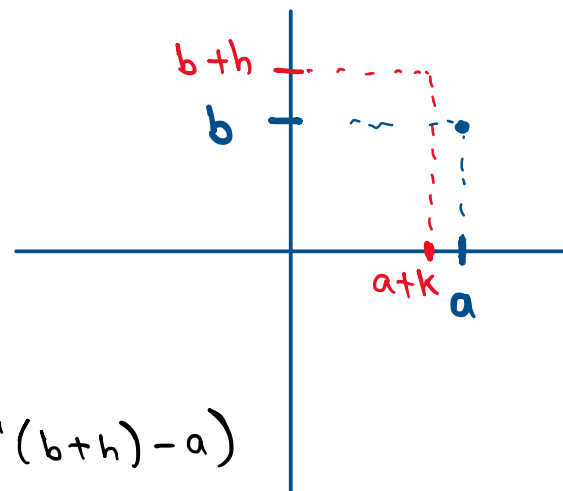
$\Rightarrow F^{-1}$ es continua en b .

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [F^{-1}(b+h) - F^{-1}(b)] = 0$$

Por lo anterior, si $h \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0$

$$\Rightarrow (F^{-1})'(b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{F(a+k) - F(a)}{k}} = \frac{1}{F'(a)} = \frac{1}{F'(F^{-1}(b))},$$

$$\therefore (F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(F^{-1}(b))}$$



Ejemplos:

- Sabemos que si $F(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow F'(x) = n x^{n-1} \quad (x \neq 0)$

Calcularemos la derivada de $g(x) = x^{\frac{1}{m}}$, con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
Sea $F(x) = x^m$, con $x \geq 0$ si m es par y $x \in \mathbb{R}$ si m es impar $\cup$

$\Rightarrow F$ es inyectiva y $F^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}} = g(x)$

Por el teorema anterior,

$$g'(x) = (F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))} = \frac{1}{F'(x^{\frac{1}{m}})}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{m (x^{\frac{1}{m}})^{m-1}} = \frac{1}{m x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m x^{1-\frac{1}{m}}}, \quad x \neq 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} \quad (x \neq 0)$$

- Consideremos ahora $h(x) = x^{\frac{n}{m}} = (x^{\frac{1}{m}})^n \quad (m \neq 0)$

Usando regla de la cadena,

$$h'(x) = \underline{n} (x^{\frac{1}{m}})^{n-1} \cdot \left(\underline{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}-1} \right)$$

$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

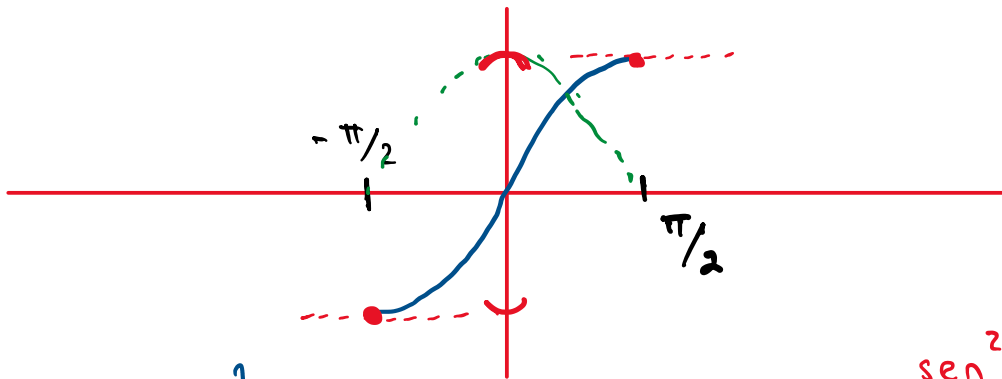
$\therefore$ Si $h(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$,

entonces $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x \neq 0 \text{ si } \alpha-1 < 0)$

Esta fórmula se generalizará para $\alpha \in \mathbb{R}$ en Cálculo II.

- Consideremos $\text{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, la cual es una función inyectiva.

A la función $\text{sen}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ también se le denota como arc sen



$$(F^{-1})'(b) = \frac{1}{F'(F^{-1}(b))}$$

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$$

$$(\text{arc sen})'(x) = \frac{1}{\text{sen}'(\text{arc sen}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen}(x))}$$

$\begin{aligned} & \textcircled{*} \cos x \geq 0 \\ & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$

$$= \frac{1}{+\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}(x))}}$$

$$\Rightarrow (\text{arcsen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \begin{array}{l} \text{si } x \neq \pm 1 \\ x \in (-1, 1) \end{array}$$