

Derivada implícita

jueves, 20 de enero de 2022

Ejemplo. Demuestra que existe una función derivable f que satisface la ecuación $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$ para toda x , y encuentra f' en función de f .

Sol. $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$

$$\Leftrightarrow x = -f(x) - [f(x)]^5$$

Definimos $g(x) = -x - x^5$, que es derivable

$$\Rightarrow g'(x) = -1 - 5x^4 < 0$$

$\Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow g$ es inyectiva

Entonces existe $f = g^{-1}$, la cual es derivable pues g lo es

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow g(g^{-1}(x)) = g(f(x))$$

$$\Rightarrow x = g(f(x))$$

$$\Rightarrow x = -f(x) - [f(x)]^5$$

evaluamos g en $f(x)$

$$\therefore [f(x)]^5 + f(x) + x = 0$$

A demás

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{g'(f(x))}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{-1 - 5(f(x))^4}$$

¿Hay alguna forma de encontrar f' sin recurrir a g^{-1} ?

Supongamos que existe una función derivable f que satisface

$$(f(x))^5 + f(x) + x = 0$$

Derivando ambas lados de la ecuación:

$$[(f(x))^5 + f(x) + x]' = [0]'$$

$$\Rightarrow [(f(x))^5]' + [f(x)]' + [x]' = 0$$

$$\Rightarrow [5(f(x))^4 \cdot f'(x)] + f'(x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) [5(f(x))^4 + 1] = -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{5(f(x))^4 + 1}$$

Notemos que la función f de este ejercicio satisface la ecuación

$$y^5 + y + x = 0$$

Definición. Llamamos función implícita a una función que satisface una ecuación con variables x y y .

Ejemplo. Encuentra las funciones implícitas en las siguientes ecuaciones:

1) $x^2 + y^2 = 1$

Despejando y :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Definimos $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$\therefore f_1$ y f_2 satisfacen (1)

2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = -1$$

Notemos que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$ p. c. $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0 > 1$$

$\therefore$ No existen funciones definidas implícitamente por (2)

Obs. Una ecuación de variables x y y puede definir una, más de una o ninguna función implícita.

Ejercicio. Encuentra la derivada de las funciones definidas implícitamente por las siguientes ecuaciones:

1) $x^2 + y^2 = 1$

Supongamos que existe una función derivable f tal que

$$x^2 + (f(x))^2 = 1$$

$$\Rightarrow [x^2]' + [(f(x))^2]' = 1'$$

$$\Rightarrow 2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = -2x$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{-x}{f(x)}}$$

$$2) \quad y^3 - 3y = x$$

Supongamos que existe una función derivable f tal que

$$(f(x))^3 - 3 \cdot f(x) = x$$

$$\Rightarrow [(f(x))^3]' + [-3f(x)]' = x'$$

$$\Rightarrow 3(f(x))^2 \cdot f'(x) - 3f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) [3(f(x))^2 - 3] = 1$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{1}{3(f(x))^2 - 3}}$$

$$3) \quad xy + \sin(xy) = 3$$

Supongamos que existe una función derivable f tal que

$$x \cdot f(x) + \sin(x \cdot f(x)) = 3$$

$$\Rightarrow [x \cdot f(x)]' + [\sin(x \cdot f(x))]' = 3'$$

$$\Rightarrow [f(x) + x \cdot f'(x)] + \cos(x \cdot f(x)) \cdot [x \cdot f(x)]' = 0$$

$$\Rightarrow f(x) + x \cdot f'(x) + \cos(x \cdot f(x)) [f(x) + x \cdot f'(x)] = 0$$

$$\Rightarrow f(x) + x \cdot f'(x) + f(x) \cdot \cos(x \cdot f(x)) + x \cdot f'(x) \cdot \cos(x \cdot f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) [x + x \cdot \cos(x \cdot f(x))] = -f(x) - f(x) \cdot \cos(x \cdot f(x))$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = - \frac{f(x) + f(x) \cdot \cos(x \cdot f(x))}{x + x \cdot \cos(x \cdot f(x))}}$$

$$4) \quad x^3 + y^4 = 3x$$

Consideremos a y como una función derivable que depende de x

$$\Rightarrow [x^3]' + [y^4]' = [3x]'$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4y^3 \cdot y' = 3$$

$$\Rightarrow 4y^3 \cdot y' = 3 - 3x^2$$

$$\Rightarrow y' = \underline{\frac{3 - 3x^2}{4y^3}}$$

$$\Rightarrow \underline{y' = \frac{3-3x}{4y^3}}$$

A la derivada de una función implícita f expresada en términos de f se le conoce como **derivada implícita**.

Recta tangente

Sea f una función y $(a, f(a)) \in G_f$

Ya sabemos que la pendiente de

la recta tangente a G_f en $(a, f(a))$

es $f'(a)$, y la ecuación de una recta

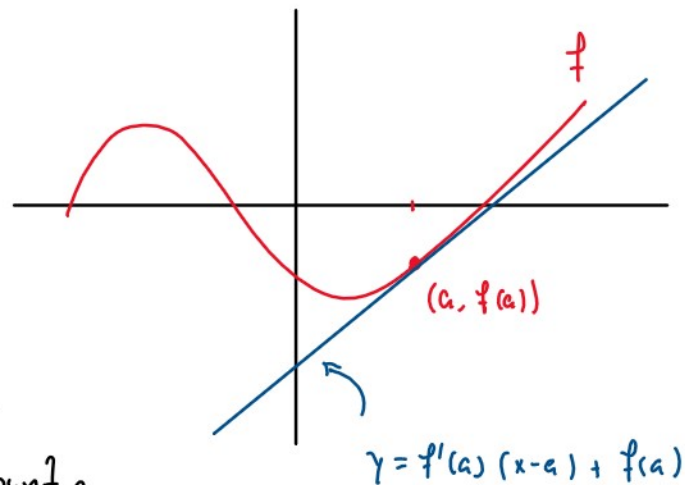
con pendiente m que pasa por el punto

(x_0, y_0) es $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\Rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

es la ecuación de la recta tangente a G_f por $(a, f(a))$



Ya hemos visto ecuaciones que definen más de una función implícita

$(x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f_1 \text{ y } f_2)$; en este caso la ecuación de la recta

tangente a la curva (el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación)

en el punto (x_0, y_0) está dada por

$$\boxed{y = y'(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0}$$

Ejercicio. Encuentra la ecuación de la recta tangente a las curvas definidas por las siguientes ecuaciones en los puntos indicados:

1) $x^3 + y^3 = 4xy + 1$ en $(2, 1)$

Derivando implícitamente la ecuación:

$$[x^3]' + [y^3]' = [4xy]' + \cancel{1}' \quad \text{? } 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 4y + 4x \cdot y'$$

$$\Rightarrow (3y^2 - 4x) \cdot y' = 4y - 3x^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(2, 1)$ es

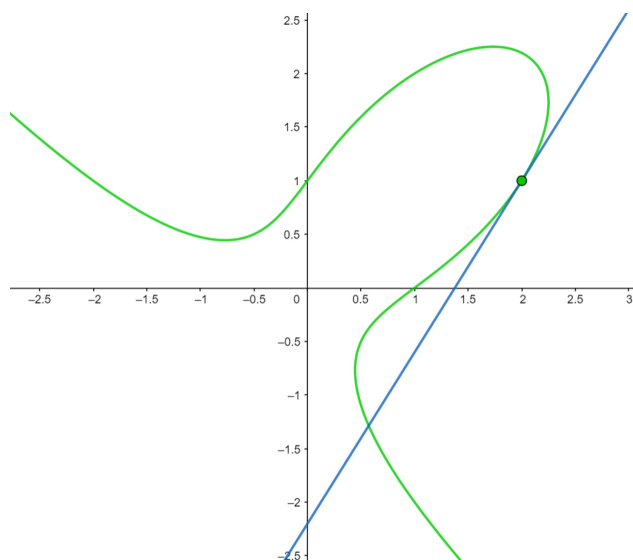
$$y = y'(2, 1) \cdot (x - 2) + 1 = \frac{4(1) - 3(2)^2}{3(1)^3 - 4(2)} (x - 2) + 1$$

$$= \frac{4 - 12}{3 - 8} (x - 2) + 1$$

$$= \frac{8}{5} (x - 2) + 1$$

$$= \frac{8}{5}x - \frac{16}{5} + 1$$

$\therefore y = \frac{8}{5}x - \frac{11}{5}$ es la ecuación de la recta tangente.



$$2) (y-3)^2 + 3(x-2)^2 = 4 \quad \text{en } (1, 4)$$

Derivando implícitamente:

$$[(y-3)^2]' + 3[(x-2)^2]' = \cancel{4}'$$

$$\Rightarrow 2(y-3) \cdot y' + 6(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow 2(y-3) \cdot y' = -6(x-2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3(2-x)}{y-3}$$

Aplicando la fórmula de la recta tangente al punto $(1, 4)$:

$$y = y'(1, 4) \cdot (x-1) + 4$$

$$= \frac{3(2-1)}{4-3} (x-1) + 4$$

$$= 3(x-1) + 4$$

$$= 3x - 3 + 4$$

∴ $y = 3x + 1$ es la ecuación de la recta tangente

