

Funciones inversas

miércoles, 19 de enero de 2022

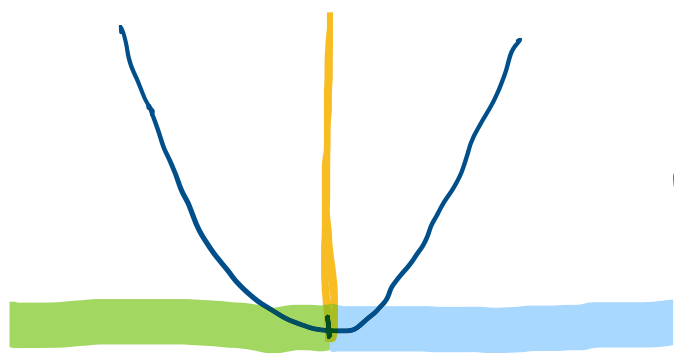
Definición. Sea $F: A \rightarrow B$ una función. Decimos que F es invertible o que F tiene inversa si existe una función $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ F = I_A$ y $F \circ g = I_B$.

En este caso, g es la función inversa de F y se denotará como $g = F^{-1}$.

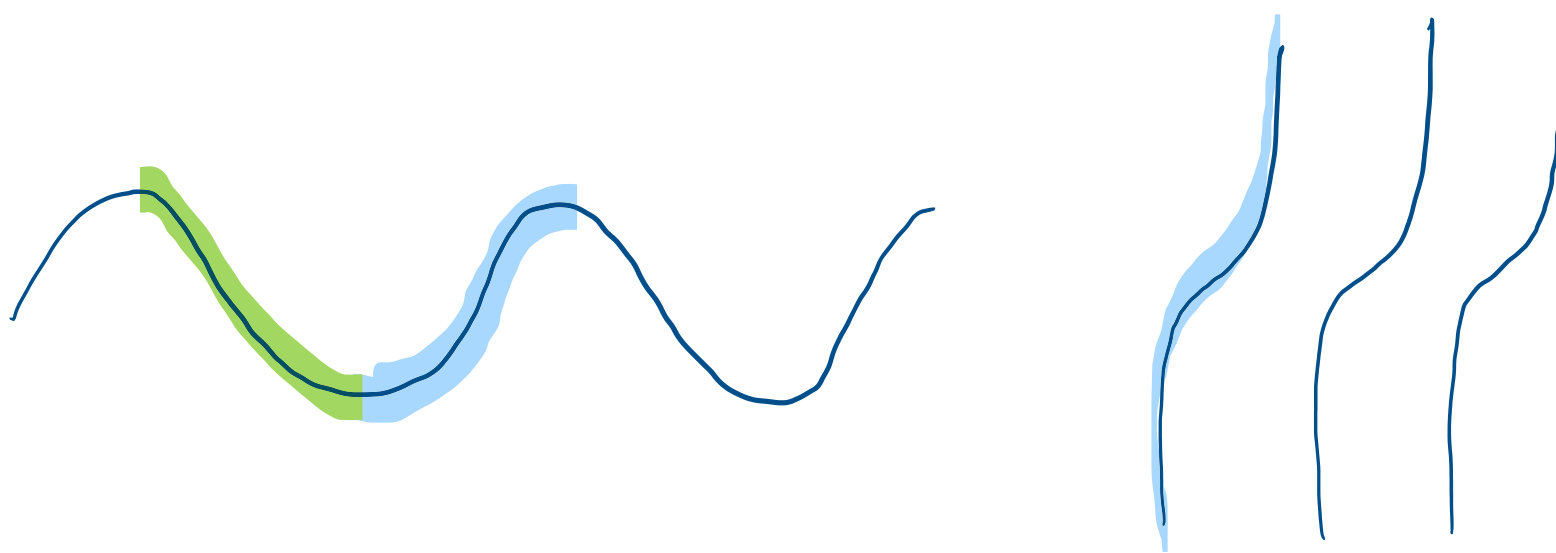
Sabemos que F es invertible $\Leftrightarrow F$ es biyectiva.

* Si F es inyectiva, podemos modificar el contradominio de F para que la función sea biyectiva y así definir F^{-1} .

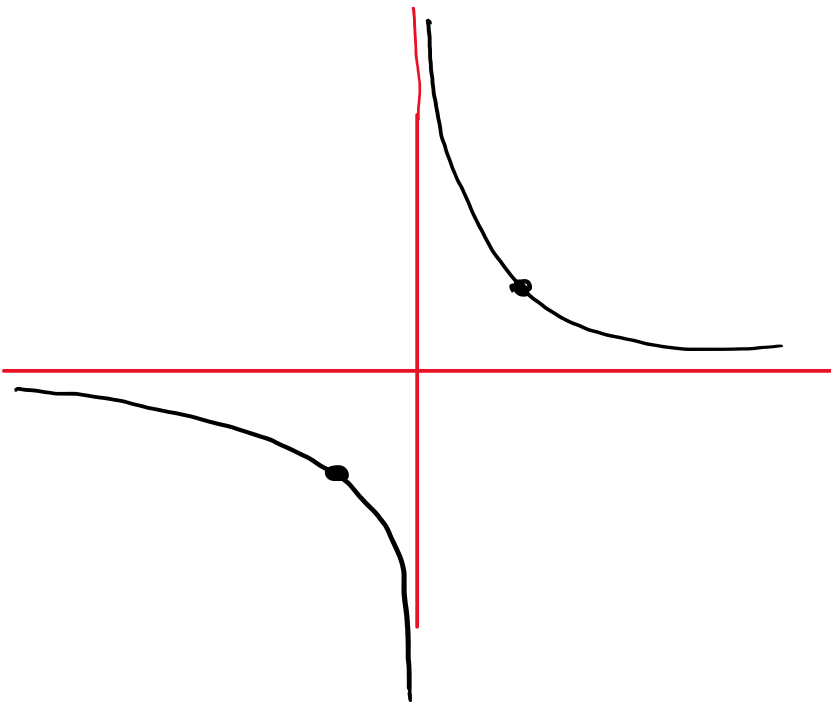
* Si F no es inyectiva, en ocasiones es posible restringir su dominio a un subconjunto en el cual F sea inyectiva. De esta manera, modificando (en caso de ser necesario) el contradominio, obtenemos una función biyectiva.



$$F(x) = x^2 \quad F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$
$$F^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$



Si F es continua e inyectiva, ¿ F debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente? No



$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Teorema Si f es continua e inyectiva en un intervalo, entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en dicho intervalo.

Demostración

Af. 1) Si $a < b < c$ son tres puntos en el intervalo, entonces $f(a) < f(b) < f(c)$ o $f(a) > f(b) > f(c)$.

Como f es inyectiva $\Rightarrow f(a) \neq f(c)$
 $\Rightarrow f(a) < f(c)$ o $f(a) > f(c)$.

Supongamos que $f(a) < f(c)$.

- Si $f(b) < f(a) \Rightarrow f(b) < f(a) < f(c)$.

Aplicando el T.V.I al intervalo $[b, c]$, existe $x \in [b, c]$ tal que $f(x) = f(a)$ (con $x \neq a$)!

(contradiciendo que f es inyectiva). $\therefore f(a) < f(b)$.

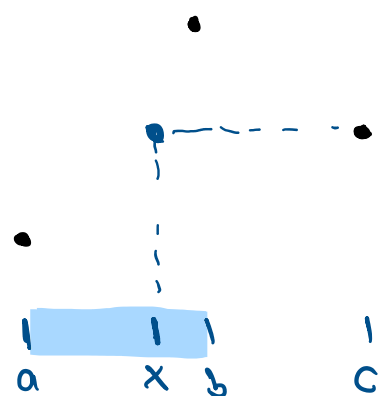
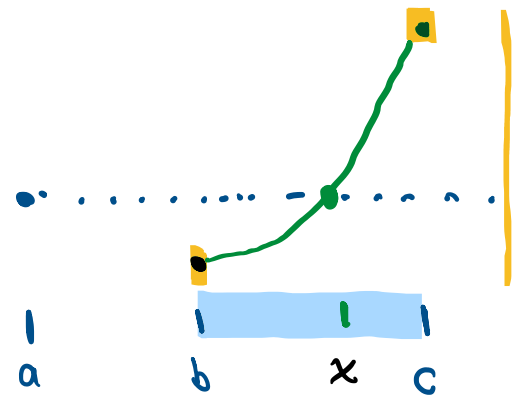
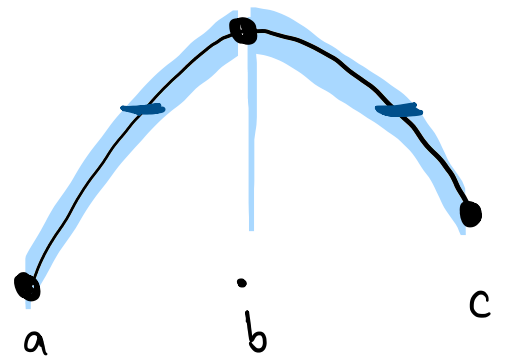
- Si $f(b) > f(c) \Rightarrow f(a) < f(c) < f(b)$.

Aplicando el T.V.I. a $[a, b]$, existe $x \in [a, b]$

t.q. $f(x) = f(c)$ (con $x \neq c$)! $\therefore f(b) < f(c)$

Concluimos que $f(a) < f(b) < f(c)$.

Análogamente, si $f(a) > f(c)$, podemos demostrar que $f(a) > f(b) > f(c)$.



AF. 2) Si $a < b < c < d$ son cuatro puntos en el intervalo, entonces $F(a) < F(b) < F(c) < F(d)$ o $F(a) > F(b) > F(c) > F(d)$.

Debido a 1) tenemos que $F(a) < F(b) < F(c)$ o $F(a) > F(b) > F(c)$, y $F(b) < F(c) < F(d)$ o $F(b) > F(c) > F(d)$. Combinando estas afirmaciones concluimos que

$$F(a) < F(b) < F(c) < F(d) \quad \text{o} \quad F(a) > F(b) > F(c) > F(d)$$

AF. 3). F es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el intervalo.

Sean $a < b$ dos puntos en el intervalo. $\Rightarrow F(a) < F(b)$ o $F(a) > F(b)$.

• Si $F(a) < F(b)$, veremos que F es estrictamente creciente.

Sean $c < d$ dos puntos en el intervalo. Aplicando la AF. 1) o 2) al conjunto $\{a, b, c, d\}$ después de ordenarlos en forma creciente obtenemos que $F(c) < F(d)$. (la función F preserva el orden en todos los puntos o invierte el orden en todos los puntos).

$$\begin{array}{ccc} \dot{a} & & \dot{b} \\ & < & \\ \dot{c} & & \dot{d} \end{array} \quad \begin{array}{l} F(a) < F(b) \\ F(c) < F(d) \end{array}$$

• Si $F(a) > F(b)$, deducimos que F es estrictamente decreciente.

* Si $F: A \rightarrow B$ es inyectiva, consideraremos $F: A \rightarrow F[A]$ y $F^{-1}: F[A] \rightarrow A$, es decir, para cualquier función inyectiva F consideraremos su función inversa F^{-1} definida en $F[A]$.

En este caso,

$$F(a) = b \iff a = F^{-1}(b)$$

Teorema Si F es estrictamente creciente (decreciente),
entonces F^{-1} también lo es.

Demostración

• Supongamos que $F: A \rightarrow F(A)$ es estrictamente creciente. (decreciente)

P.D. $F^{-1}: F(A) \rightarrow A$ es estrictamente creciente. (decreciente)

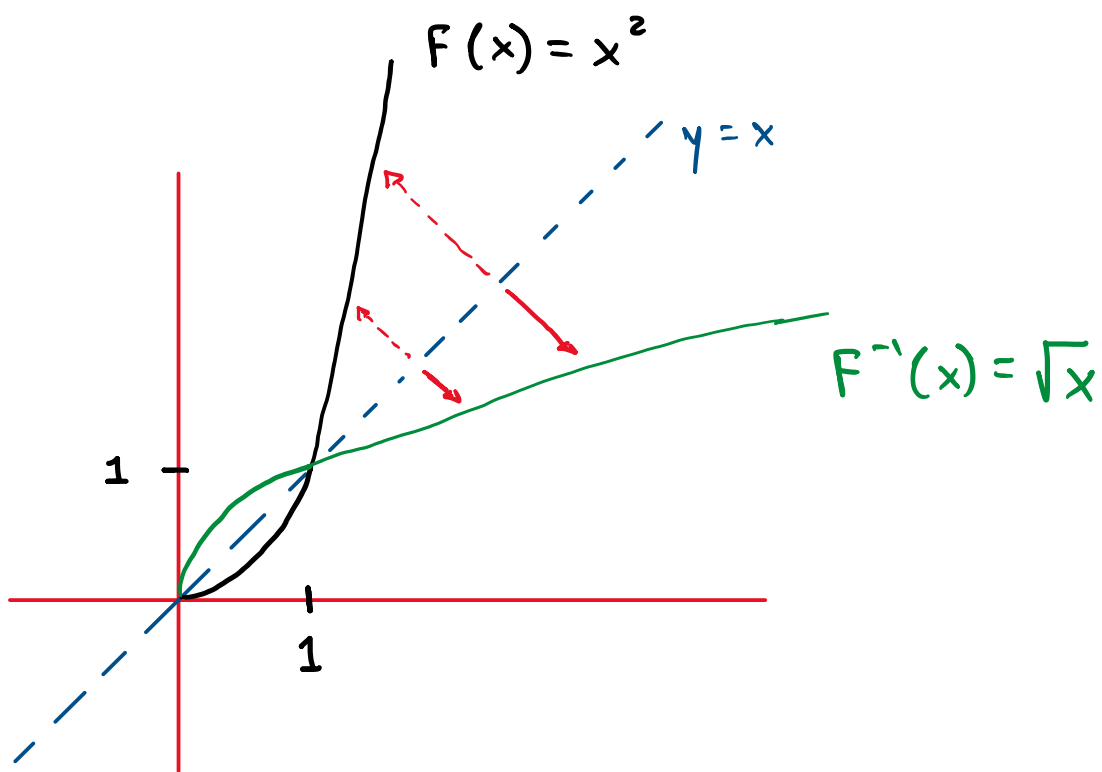
Sean $b_1, b_2 \in F(A)$ t.q. $b_1 < b_2$. P.D. $F^{-1}(b_1) < F^{-1}(b_2)$

Como $b_1, b_2 \in F(A) \Rightarrow$ existen $a_1, a_2 \in A$ t.q. $F(a_1) = b_1$ y $F(a_2) = b_2$

$\Rightarrow a_1 = F^{-1}(b_1)$ y $a_2 = F^{-1}(b_2)$. (P.D. $a_1 < a_2$)

Sup. que $a_1 \geq a_2 \Rightarrow F(a_1) \geq F(a_2)$ (porque F es estrictamente creciente)
 $\Rightarrow b_1 \geq b_2$! $\therefore a_1 < a_2$, es decir, (decreciente)
 $F^{-1}(b_1) < F^{-1}(b_2)$.

Gráfica de F^{-1}

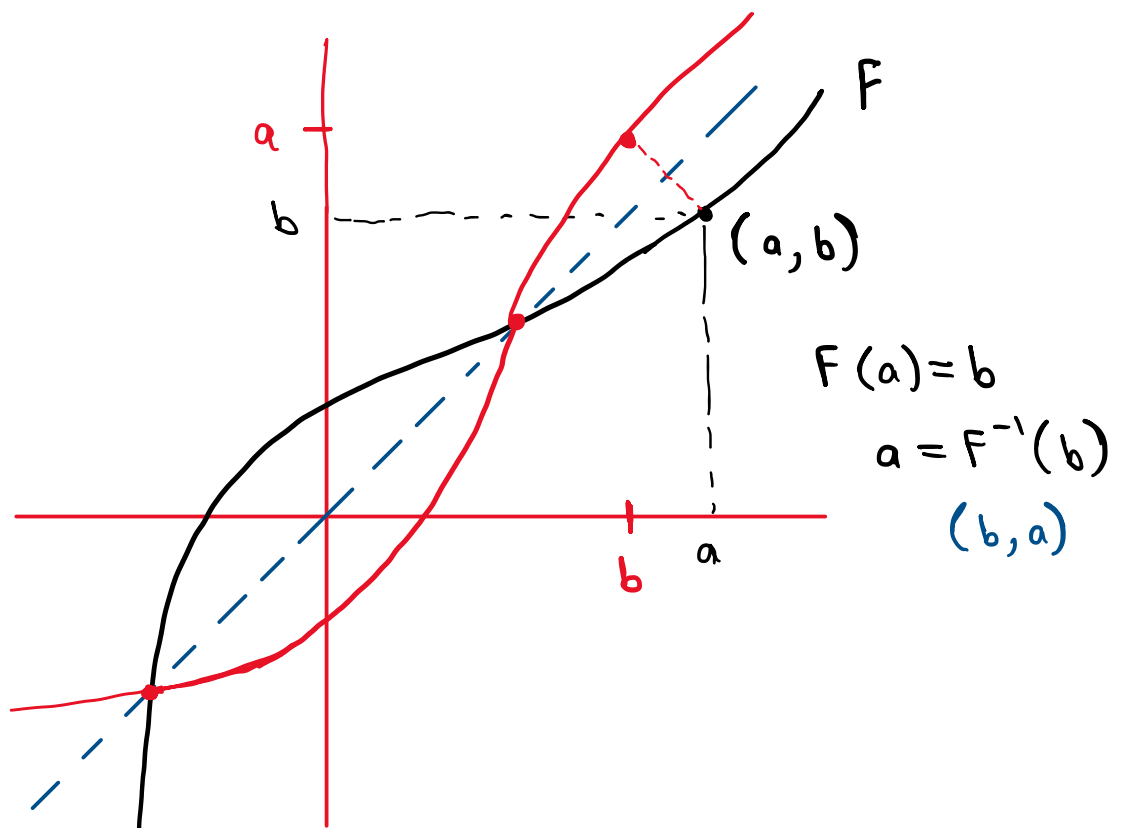


$$\text{Si } (a, b) \in G_F$$

$$\Leftrightarrow F(a) = b$$

$$\Leftrightarrow a = F^{-1}(b)$$

$$\Leftrightarrow (b, a) \in G_{F^{-1}}$$



Para obtener la gráfica de F^{-1} , basta reflejar la gráfica de F con respecto a la recta $y = x$