

## Puntos máximos, mínimos y gráficas de funciones

martes, 18 de enero de 2022

**Ejercicio.** Sea  $f(x) = cx^2 + dx + e$  un polinomio definido en  $[a, b]$ . Prueba que el punto  $k$ , cuya existencia la asegura el TVM, es el punto medio de  $[a, b]$ .

**Sol.** Como  $f$  es un polinomio, es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$

$$\Rightarrow \text{existe } k \in (a, b) \text{ t. q. } f'(k) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{TVM}$$

$$\Rightarrow f'(k) = \frac{(cb^2 + db + e) - (ca^2 + da + e)}{b - a}$$

$$= \frac{c(b^2 - a^2) + d(b - a)}{b - a}$$

$$= \frac{c(b+a)(\cancel{b-a}) + d(\cancel{b-a})}{\cancel{b-a}}$$

$$\Rightarrow f'(k) = (a+b)c + d \quad (1)$$

Por otro lado,

$$f'(x) = 2cx + d \Rightarrow f'(k) = 2ck + d \quad (2)$$

$$\stackrel{1,2}{\Rightarrow} 2ck + \cancel{d} = (a+b)c + \cancel{d}$$

$$\Rightarrow 2\cancel{c}k = (a+b)\cancel{c}$$

$$\Rightarrow 2k = a + b$$

$$\therefore k = \frac{a+b}{2} \quad \blacksquare$$

**Ejercicio.** Si  $f$  es derivable en  $[a, b]$  y  $f'(x) \neq 0$  p. c.  $x \in (a, b)$ , entonces  $f(x) = 0$  en a lo más un punto  $x \in [a, b]$ .

**Sol.** Supongamos por contradicción que existen  $c, d \in [a, b]$  tales que  $c \neq d$  y  $f(c) = 0 = f(d)$ .

$$c \neq d \quad y \quad f(c) = 0 = f(d).$$

Supongamos que  $c < d$ . Como  $c, d \in [a, b] \Rightarrow [c, d] \subset [a, b]$   
 $\Rightarrow f$  es derivable en  $[c, d]$

$\Rightarrow f$  es continua en  $[c, d]$ , derivable en  $(c, d)$

$$y \quad f(c) = 0 = f(d)$$

$\Rightarrow$  existe  $\gamma \in (c, d)$  t. q.  $f'(\gamma) = 0$  (Teorema de Rolle)

Pero  $c, d \in [a, b] \Rightarrow (c, d) \subset (a, b)$

$\Rightarrow f'(\gamma) = 0$  con  $\gamma \in (a, b)$  !

$\therefore f$  se anula a lo más en un punto de  $[a, b]$ .

**Ejercicio.** Prueba que la ecuación  $\tan x = -x$  solo tiene una solución en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Sol.** Definimos  $f(x) = \tan x + x = \frac{\sin x}{\cos x} + x$

Notemos que  $\cos x \neq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow f$  es continua en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  y derivable en  $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow f'(x) = \sec^2 x + 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) > 1 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Además} \quad f'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} + 1 = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{2}{4}\right)} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

es decir,  $f'$  existe en los extremos de  $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f$  es derivable en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  y

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{p.c.} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow f$  se anula en a lo más un punto de  $[0, \frac{\pi}{4}]$  (cf. anterior)

Finalmente notemos que  $f(0) = \tan(0) + 0 = 0$

$$\Rightarrow \tan(0) = -(0)$$

$\therefore x=0$  es la única solución de  $\tan x = -x$  en  $[0, \frac{\pi}{4}]$

**Ejercicio.** Localiza las puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones en los respectivos intervalos:

1)  $f(x) = 9x - x^3$  en  $[-3, 3]$

$$\Rightarrow f'(x) = 9 - 3x^2$$

$$\text{Luego, } f'(x) = 0 \iff 9 - 3x^2$$

$$\iff 3x^2 = 9$$

$$\iff x^2 = 9$$

$$\iff x = \sqrt{3} \text{ o } x = -\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \sqrt{3}$  y  $-\sqrt{3}$  son puntos críticos de  $f$ .

$$\text{Además } f''(x) = -6x$$

$$\Rightarrow f''(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0 \quad \text{y} \quad f''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$$

$\Rightarrow -\sqrt{3}$  es un mínimo local y  $\sqrt{3}$  es un máximo local

Comparamos  $f(-\sqrt{3})$  y  $f(\sqrt{3})$  con  $f(-3)$  y  $f(3)$

$f$  evaluada en los extremos del intervalo

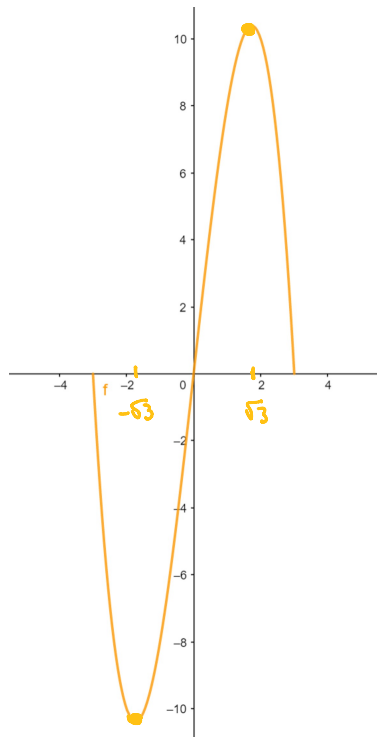
$$f(-\sqrt{3}) = 9(-\sqrt{3}) - (\sqrt{3})^3 = -9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - (\sqrt{3})^3 = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$f(-3) = 9(-3) - (-3)^3 = -27 - (-27) = 0$$

$$f(3) = 9(3) - 3^3 = 27 - 27 = 0$$

$\therefore f$  alcanza su máximo en  $\sqrt{3}$  y su mínimo en  $-\sqrt{3}$



2)  $g(x) = |x^2 - 1|$  en  $[-4, 4]$

Notemos que  $g$  no es derivable cuando  $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ y } x = 1$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Expresemos  $g(x)$  sin el valor absoluto para calcular  $g'$

$$\sim x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \text{ y } x-1 \geq 0, \text{ o bien } x+1 \leq 0 \text{ y } x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ y } x \geq 1, \text{ o bien } x \leq -1 \text{ y } x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, \infty) \text{ o } x \in (-\infty, -1]$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cap [-4, 4] \\ = [-4, -1] \cup [1, 4]$$

$$\sim \text{Similarmente } x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \in [-4, -1] \cup [1, 4] \\ -(x^2 - 1) & \text{si } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

siendo que  $x^2 - 1$  es derivable en  $(-4, -1) \cup (1, 4)$  y  
 $-(x^2 - 1)$  es derivable en  $(-1, 1)$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-4, -1) \cup (1, 4) \\ -2x & \text{si } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Luego,  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow g$  tiene un punto crítica en  $x = 0$ , y

$$g''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in (-4, -1) \cup (1, 4) \\ -2 & \text{si } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Como  $0 \in (-1, 1) \Rightarrow g''(0) = -2 < 0$

$\Rightarrow x = 0$  es un máximo local de  $g$

Evaluemos  $g$  en  $0$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $-4$  y  $4$

donde  $g'$  no existe

extremos del intervalo

$$g(0) = |0^2 - 1| = |-1| = 1$$

$$g(-1) = |(-1)^2 - 1| = 0$$

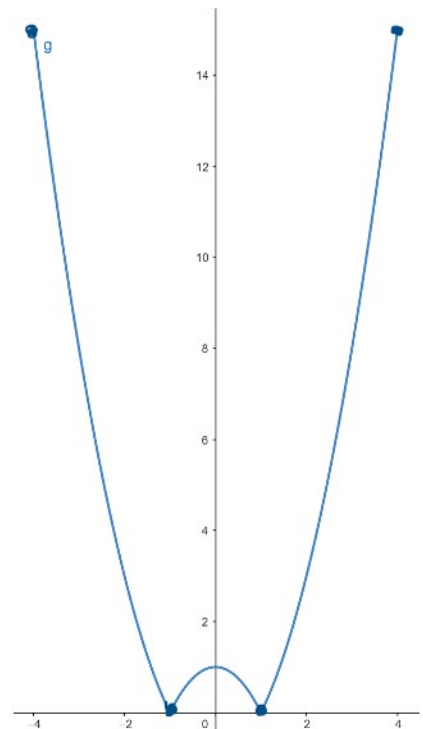
$$g(1) = |1^2 - 1| = 0$$

$$g(-4) = |(-4)^2 - 1| = |16 - 1| = 15$$

$$g(4) = |4^2 - 1| = |16 - 1| = 15$$

$\therefore g$  alcanza su valor máximo en  $-4$  y  $4$ ,

y alcanza su mínimo en  $-1$  y  $1$ .



Ejercicio. Dibuja la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

Para dibujar  $G_f$  necesitamos:

- ~  $\text{Dom}(f)$
- ~ intersección de  $G_f$  con los ejes coordenados
- ~  $f'$  y  $f''$
- ~ intervalos de crecimiento y de decrecimiento
- ~ puntos críticos
- ~ máximas y mínimos locales
- ~ concavidad
- ~ límites cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$

~  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Notemos que  $f$  es continua en su dominio.

~  $G_f$  interseca al eje  $Y$  en  $f(0) = 0$ , y

$G_f$  interseca al eje  $X$  en  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$\Rightarrow G_f \cap \text{eje } X = \{(0,0)\} = G_f \cap \text{eje } Y$

~  $f'(x) = \left[ \frac{x}{(x-1)^2} \right]'$

$$= \frac{x'(x-1)^2 - x[(x-1)^2]'}{[(x-1)^2]^2}$$
$$= \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(x-1) - 2x}{(x-1)^3}$$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$

$$f''(x) = \left[ -\frac{x+1}{(x-1)^3} \right]'$$
$$= -\frac{(x+1)'(x-1)^3 - (x+1)[(x-1)^3]'}{[(x-1)^3]^2}$$

$$= - \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6}$$

$$= - \frac{(x-1) - 3(x+1)}{(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x+4}{(x-1)^4}$$

~  $f$  es creciente si  $f'(x) > 0$

$$\Leftrightarrow - \frac{x+1}{(x-1)^3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)^3} < 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 > 0 \text{ y } (x-1)^3 < 0, \text{ o } x+1 < 0 \text{ y } (x-1)^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 > 0 \text{ y } x-1 < 0, \text{ o } x+1 < 0 \text{ y } x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \text{ y } x < 1, \text{ o } x < -1 \text{ y } x > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 1) \text{ o } x \in (-\infty, -1) \cap (1, \infty) = \emptyset$$

$\Rightarrow f$  es creciente en  $(-1, 1)$  y (haciendo un análisis similar)

$f$  es decreciente en  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$\sim f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$\Rightarrow x = -1$  es un punto crítico de  $f$

$$\sim f''(-1) = \frac{2(-1)+4}{(-1-1)^4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > 0 \quad \left( f(-1) = \frac{-1}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{4} \right)$$

$\Rightarrow x = -1$  es un mínimo local de  $f$

~ Notemos que  $(x-1)^4 > 0$  p.c.  $x$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x+4}{(x-1)^4}$$

$$\Leftrightarrow 2x+4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2$$

$\Rightarrow f$  es cóncava hacia arriba en  $(-2, 1) \cup (1, \infty)$ ,  
y similarmente se prueba que  $f$  es cóncava  
hacia abajo en  $(-\infty, -2)$

$$\sim \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-1)^2} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x-2} = 0 \quad \text{y similarmente}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$\sim$  Sabemos que  $f$  no está definida en  $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot \frac{1}{(x-1)^2} /$$

$$\text{siendo que } \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty \quad \text{y similarmente} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

