

Definición. Un punto crítico de una función F es un número a tal que $F'(a) = 0$.

Al número $F(a)$ se le llama valor crítico de F .

Notación (derivadas de orden superior)

Si F es una función derivable en un intervalo I . En este caso, podemos considerar la función $F': I \rightarrow \mathbb{R}$. Si F' es derivable en $a \in I$, denotaremos a su derivada como

$$F''(a) = (F')'(a) \quad \text{o}$$
$$F^{(2)}(a) = (F'')'(a).$$

A F'' se le denomina segunda derivada de F .

Análogamente, podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ (en caso de existir):

$$F^{(0)} = F$$
$$F^{(n)} = (F^{(n-1)})'$$

es decir,

$$F^{(1)} = F',$$
$$F^{(2)} = F'',$$
$$F^{(3)} = F''', \text{ etc.}$$

Teorema (criterio de la segunda derivada)

Sea a un punto crítico de F , es decir, $F'(a) = 0$.

- Si $F''(a) > 0$, entonces F tiene un mínimo local en a .
- Si $F''(a) < 0$, entonces F tiene un máximo local en a .

Demostración

Por definición,

$$F''(a) = (F')'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(a+h) - F'(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(a+h)}{h}$$

Supongamos que $F''(a) > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(a+h)}{h} > 0$

$\Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que

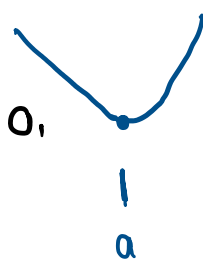
* $\frac{F'(a+h)}{h} > 0$ cuando $0 < |h| < \delta$ (en un intervalo alrededor de a)

Sea h tal que $0 < |h| < \delta$

- Si $h < 0 \Rightarrow F'(a+h) < 0 \Rightarrow F$ es estrictamente decreciente a la izquierda de a .

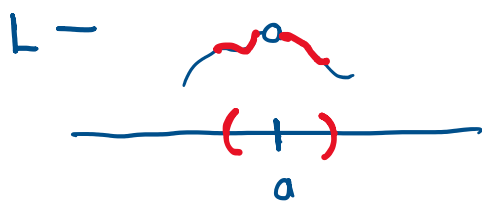
- Si $h > 0 \Rightarrow F'(a+h) > 0 \Rightarrow F$ es estrictamente creciente a la derecha de a .

$\therefore a$ es un punto mínimo local de F cuando $F''(a) > 0$.



Análogamente, si $F''(a) < 0 \Rightarrow a$ es un punto máximo local de F .

* Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) > 0 \Rightarrow$ existe $\delta > 0$ t.q. $\forall x$ ($0 < |x-a| < \delta \Rightarrow F(x) > 0$)



* Si $F''(a) = 0$, el criterio no da información.

$f(x) = x^4$ • 0 es mínimo (local y global)

• $f''(x) = 12x^2$ $f''(0) = 0$.

• $g(x) = -x^4$ • 0 es máximo (local y global)
 $f''(0) = 0$

• $h(x) = x^3$ • 0 es punto silla (no es máximo ni mínimo local)

• $h''(x) = 6x$ $h''(0) = 0$.

* F tiene un mínimo local en $a \Rightarrow F''(a) > 0$

máximo $a \Rightarrow F''(a) < 0$.

Teorema. Supongamos que $F'(a) = 0$ y que $F''(a)$ existe.

(1) Si F tiene un mínimo local en a , entonces $F''(a) \geq 0$.

(2) Si F tiene un máximo local en a , entonces $F''(a) \leq 0$.

Demostración (1)

Supongamos que a es un punto mínimo local de F . P.D. $F''(a) \geq 0$

Si $F''(a) < 0 \Rightarrow a$ es un punto máximo local de F .

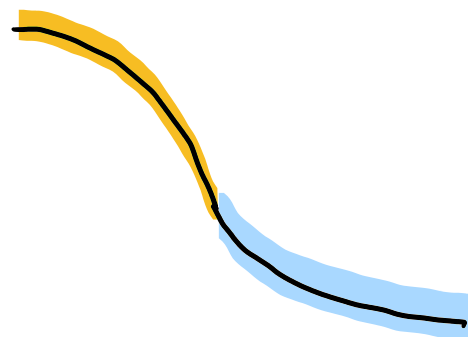
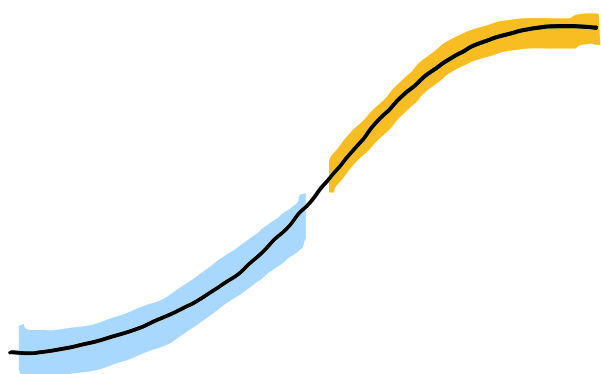
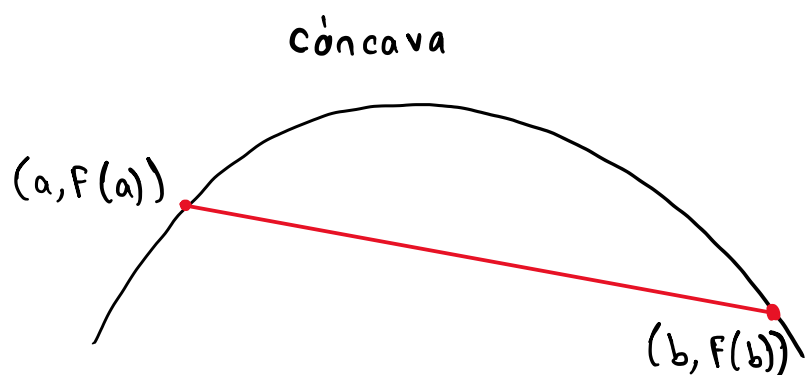
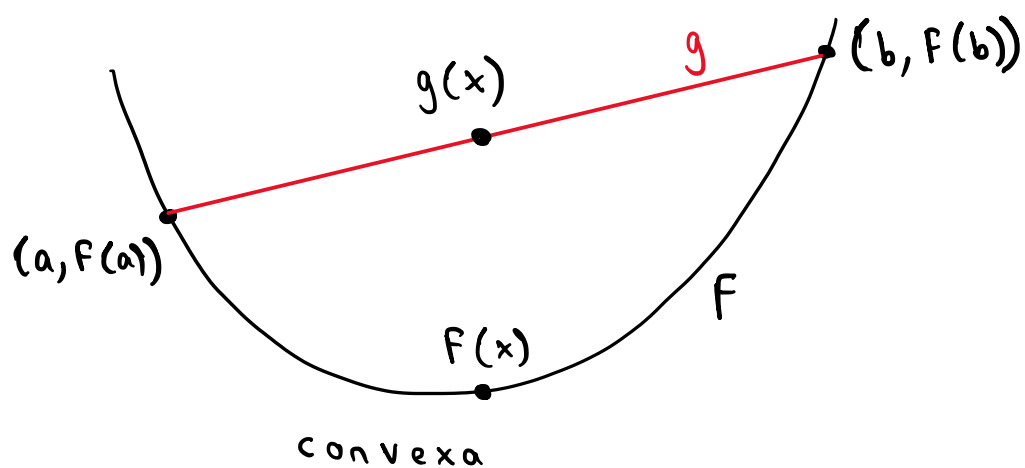
Como el valor máximo y mínimo de F coinciden, entonces F es constante en algún intervalo alrededor de $a \Rightarrow F'(x) = 0 \Rightarrow F''(x) = 0$ en dicho intervalo. En particular, $F''(a) = 0$!
 $\therefore F''(a) \geq 0$.

Análogamente se demuestra (2).

Concavidad y convexidad

Definición. Una Función F es **convexa** en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento de recta que une $(a, F(a))$ con $(b, F(b))$ se sitúa por encima de la gráfica de F . 

Definición. Una Función F es **cóncava** en un intervalo I si para todo $a, b \in I$, el segmento de recta que une $(a, F(a))$ con $(b, F(b))$ se sitúa por debajo de la gráfica de F . 



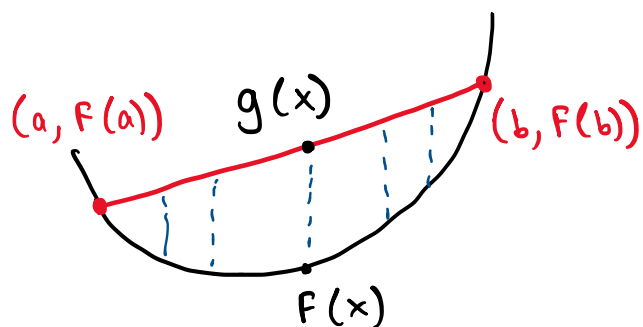
Proposición. Una función F es convexa en un intervalo I si y solo si

$$\forall a, x, b \in I \quad (a < x < b \Rightarrow \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < \frac{F(b) - F(a)}{b - a})$$

Demostración

Sea g la función lineal cuya gráfica es la recta que pasa por $(a, F(a))$ y $(b, F(b))$, es decir,

$$g(x) = \left(\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right) (x - a) + F(a).$$



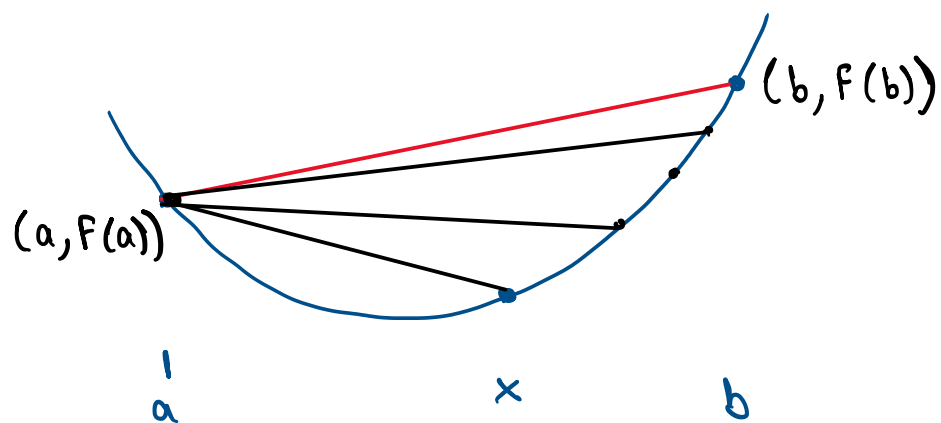
Entonces F es convexa si y solo si para cada $a, x, b \in I$, con $a < x < b$:

la gráfica de g está por encima de la de F .

$$F(x) < g(x) \Leftrightarrow F(x) < \left(\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right) (x - a) + F(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

(la pendiente de la recta que pasa por $(a, F(a))$ y $(b, F(b))$ es mayor que la pendiente de la recta que pasa por $(a, F(a))$ y $(x, F(x))$ para cualquier $x \in (a, b)$).



Lema. Supongamos que f es derivable y que f' es estrictamente creciente. Si $a < b$ y $f(a) = f(b)$, entonces

$$\forall x \in (a, b) \quad f(x) < f(a) = f(b)$$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) \geq f(a) = f(b)$. En este caso, el máximo de f en $[a, b]$ se alcanza en un número $x_0 \in (a, b)$. * Este punto máximo no es único y podría coincidir con $f(a) = f(b)$.

Como f es derivable en x_0 y x_0 es punto máximo de f en $(a, b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

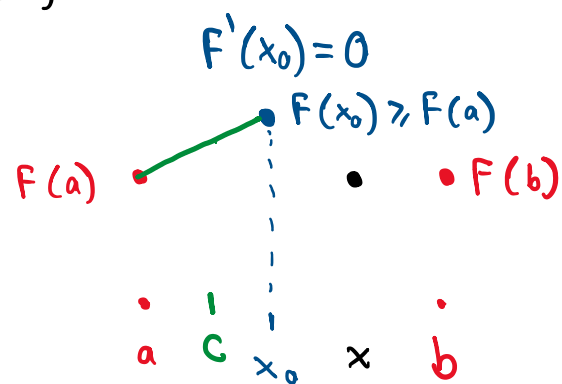
Por otro lado, sabemos que $f(x_0) \geq f(a)$. Por el TVM aplicado al intervalo $[a, x_0]$, existe $c \in (a, x_0)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0$$

Luego, $c < x_0$ y $f'(c) \geq 0 = f'(x_0)$, lo cual contradice que f' sea estrictamente creciente.

$$\therefore \forall x \in (a, b) \quad f(x) < f(a) = f(b).$$

Teorema. Si f es derivable y f' es estrictamente creciente en un intervalo I , entonces f es convexa en dicho intervalo.



Demostración

Sean $a, b, x \in I$. t.q. $a < x < b$

$$\text{P.D. } \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \text{ es decir,}$$

$$F(x) < \left(\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right) (x - a) + F(a)$$

$$\text{Definimos } g(x) = F(x) - \left(\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right) (x - a). \quad \text{P.D. } g(x) < F(a).$$

$$\Rightarrow g'(x) = F'(x) - \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } F' \text{ es estrictamente creciente} &\Rightarrow \forall y, z \in I \quad (y < z \Rightarrow F'(y) < F'(z)) \\ &\Rightarrow g'(y) < g'(z) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g'$ es estrictamente creciente.

$$\text{Además, } g(a) = F(a) \quad \text{y} \quad g(b) = F(b) - (F(b) - F(a)) = F(a).$$

Como $a < b$, $g(a) = g(b)$ y g' es estrictamente creciente

$$\xRightarrow{\text{Lema}} g(x) < g(a) = g(b) \quad (\text{para toda } x \in (a, b))$$

$$\therefore g(x) < F(a).$$

Corolario. Si $F''(x) > 0$ en un intervalo, entonces F es convexa en dicho intervalo.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Si } F''(x) > 0 \text{ en } I &\Rightarrow F'(x) \text{ es estrictamente creciente en } I \\ &\Rightarrow F \text{ es convexa en } I. \end{aligned}$$

Teorema. Si f es derivable y f' es estrictamente decreciente en un intervalo I , entonces f es cóncava en dicho intervalo.

Corolario. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava en dicho intervalo.

