

Otras versiones de la Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital ("indeterminación $\frac{0}{0}$ ")

$$(1) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(2) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(3) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(4) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(5) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(6) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(7) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(8) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(9) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(10) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(11) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(12) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(13) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(14) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(15) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty$.

Las 15 versiones anteriores pueden resumirse así:

Si $\lim_{x \rightarrow \blacksquare} F(x) = \lim_{x \rightarrow \blacksquare} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \blacksquare} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \square$, entonces $\lim_{x \rightarrow \blacksquare} \frac{F(x)}{g(x)} = \square$,
donde $\blacksquare \in \{a, a^+, a^-, \infty, -\infty\}$ y $\square \in \{L, \infty, -\infty\}$.

Ya hemos demostrado (1) y (2). A continuación demostraremos (4) y (6).

(4) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

Demostración

Por el ejercicio 11 de la Guía 4, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} F\left(\frac{1}{x}\right) = L$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, obtenemos

que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = L$

Sean $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ y $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

* La derivada de $F\left(\frac{1}{x}\right)$ no es $F'\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0$ y

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = L$

Aplicando la versión (2) a las Funciones $F(x)$ y $G(x)$ deducimos que

$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)}$.

Análogamente puede demostrarse (5) usando (3) o considerando las Funciones $F(-x)$ y $g(-x)$ para utilizar (4).

(6) Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty$.

Demostración.

Como $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$, inferimos que:

(i) existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que $F'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$.

Como consecuencia de (i), sabemos que $F(x)$ y $g(x)$ existen para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$. Recordemos que los valores de $F(a)$ y $g(a)$, en caso de existir, no influyen en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)}$ ni en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$.

Definimos $F(a)=0$ y $g(a)=0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $F(a)$ y $g(a)$). Entonces F y g son continuas en a .

Sea $x \in (a, a+\delta)$ ($x \in (a-\delta, a)$). Como F y g son derivables en $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ y continuas en a , tenemos que

(*) F y g son continuas en $[a, x]$ ($[x, a]$) y derivables en (a, x) ((x, a)).

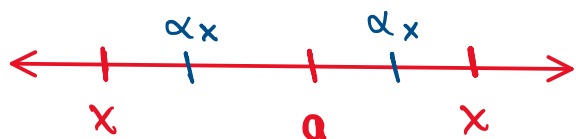
• Veamos que $g(x) \neq 0$ para toda $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Sea $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ y supongamos que $g(x)=0$. Como $g(a)=0=g(x)$, aplicando el Teorema de Rolle al intervalo $[a, x]$ o $[x, a]$, según corresponda, tenemos que existe $c \in (a, x)$ o $c \in (x, a)$ tal que $g'(c)=0$, contradiciendo (ii).

Sea $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. Debido a (*), podemos aplicar el T.V.M. Generalizado a las funciones F y g en el intervalo $[x, a]$ o $[a, x]$, según corresponda, para deducir que existe $\alpha_x \in (x, a)$ o $\alpha_x \in (a, x)$ tal que

$$[F(x) - F(a)] g'(\alpha_x) = [g(x) - g(a)] F'(\alpha_x)$$

$$\Rightarrow \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$



Notemos que $0 < |\alpha_x - a| < |x - a|$ ($\alpha_x \rightarrow a$ cuando $x \rightarrow a$).

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$$

$$\searrow = \lim_{\alpha_x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \nearrow$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty$$

⚠ Demostraremos ahora que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Por hipótesis, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$. 🐶 P.D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \infty$.

Sea $M > 0$. Debido a 🐶, existe $\delta_* > 0$ tal que

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \quad (0 < |x - a| < \delta_* \Rightarrow \frac{F'(x)}{g'(x)} > M) \quad \text{🐶}$$

$$\text{P.D. } \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \quad (0 < |x - a| < \delta_* \Rightarrow \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} > M)$$

Sea $x \in (a - \delta, a + \delta)$ tal que $0 < |x - a| < \delta_*$. Como $0 < |\alpha_x - a| < |x - a|$
 $\Rightarrow 0 < |\alpha_x - a| < \delta_* \Rightarrow \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} > M$. 🐶

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \infty.$$

Regla de L'Hôpital ("indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ ")

(16) Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

(17) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

(18) Si $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

$$(19) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(20) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

$$(21) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(22) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(23) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(24) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(25) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

$$(26) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(27) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(28) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(29) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

$$(30) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\infty, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Regla de L'Hôpital ("indeterminación $\frac{-\infty}{-\infty}$ ")

(31) - (45)

Las 45 versiones anteriores pueden resumirse así:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow \square} F(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \text{■} \text{ y } \lim_{x \rightarrow \square} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \square, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \square} \frac{F(x)}{g(x)} = \square,$$

donde $\square \in \{a, a^+, a^-, \infty, -\infty\}$, $\square \in \{L, \infty, -\infty\}$ y $\text{■} \in \{0, \infty, -\infty\}$

También se pueden considerar las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{-\infty}{\infty}$ (46) - (75)

(46) Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

* Existen otras indeterminaciones al calcular límites, como 0^∞ o ∞^0 .
Esto se revisará en Cálculo II.

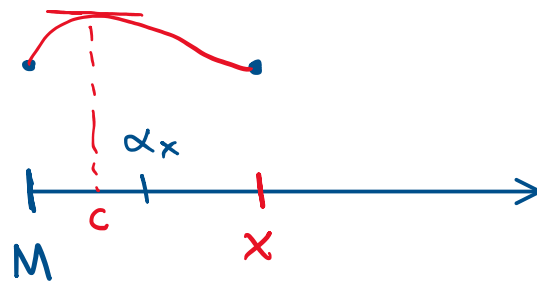
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = ? \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(19) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

(*) $\exists M > 0 \quad \forall x \geq M \quad \left| \frac{F'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$



En particular, $g'(x) \neq 0$ para toda $x \geq M$.

Sea $x > M$. Como F y g son continuas en $[M, x]$ y derivables en (M, x) , por el T.V.M. de Cauchy existe $\alpha_x \in (M, x)$ tal que

$$[F(x) - F(M)] g'(\alpha_x) = [g(x) - g(M)] F'(\alpha_x)$$

Dado que $\alpha_x \gg M \Rightarrow g'(\alpha_x) \neq 0$. Además, $g(x) \neq g(M)$, pues en caso contrario, por el Teorema de Rolle existiría $c \in (M, x)$ tal que $g'(c) = 0$. Luego,

$$\frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} = \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \quad \text{para algún } \alpha_x \in (M, x).$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} - L \right| = \left| \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| \stackrel{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para toda } x \gg M. \\ \text{(porque } \alpha_x \gg M)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left| \frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{para toda } x \gg M$$

* Como $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \Rightarrow \frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} \approx \frac{F(x)}{g(x)}$ para x "suficientemente grande".

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$, existe $M_0 > M$ tal que

$$\forall x \gg M_0 \quad F(x) > F(M).$$

En particular, $F(x) \neq F(M)$ para x "suficientemente grande" ($x \gg M_0$).

Notemos que

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} \cdot \boxed{\frac{g(x) - g(M)}{g(x)}} \cdot \frac{F(x)}{F(x) - F(M)}$$

Queremos demostrar que $\left| \frac{F(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon \quad \forall x \gg \square$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x) - g(M)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{g(M)}{g(x)} \right] = 1 - 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{F(x) - F(M)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{F(M)}{F(x)}} = \frac{1}{1 - 0} = 1.$$

$$\text{Sean } H(x) = \frac{F(x) - F(M)}{g(x) - g(M)} \quad \text{y} \quad K(x) = \frac{g(x) - g(M)}{g(x)} \cdot \frac{F(x)}{F(x) - F(M)}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1 \quad \text{y} \quad |H(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para toda } x > M.$$

Tomando $\varepsilon = 2 > 0$, sabemos que existe $M_1 > 0$ t.q.

$$|H(x)| - |L| \leq |H(x) - L| < 1 \quad \text{para toda } x > M_1$$

$$\Rightarrow |H(x)| < |L| + 1 \quad \text{para toda } x > M_1$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$ y $\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} > 0$, existe $M_2 > 0$ t.q.

$$\forall x > M_2 \quad |K(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}.$$

Definimos $\hat{M} = \max\{M, M_1, M_2, M_0\}$.

Luego, si $x > \hat{M} \Rightarrow$

$$\left| \frac{F(x)}{g(x)} - L \right| = |H(x)K(x) - L| = |H(x)K(x) - H(x) + H(x) - L|$$

$$\leq |H(x)| \cdot |K(x) - 1| + |H(x) - L|$$

$$< (|L|+1) \left(\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \right) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

Las otras 70 versiones "se dejan como ejercicio".

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \frac{1}{6} (1) = \frac{1}{6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(x) \sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos^2(x) + 2 \sin^2(x)}{2} \\
 &\quad \frac{0}{0} \qquad \qquad \frac{0}{0} \\
 &= \frac{-2(1) + 2(0)}{2} = -1
 \end{aligned}$$