

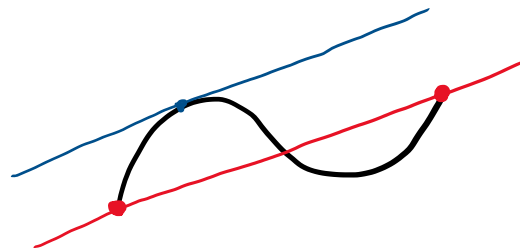
Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Teorema del Valor Medio (T.V.M.)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $x \in (a, b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Corolario

(0) Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo I , entonces f es constante en dicho intervalo.

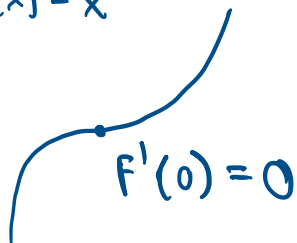
(1) Si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo I , entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

(2) Si $f'(x) \geq 0$ para toda x en un intervalo, entonces f es creciente en dicho intervalo.

(3) Si $f'(x) < 0$ para toda x en un intervalo, entonces f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

(4) Si $f'(x) \leq 0$ para toda x en un intervalo, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

$$f(x) = x^3$$



f nunca es constante
es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$

Teorema del Valor Medio de Cauchy o

Teorema del Valor Medio Generalizado

Si F y g son Funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces existe $x \in (a, b)$ tal que

$$[F(b) - F(a)] g'(x) = [g(b) - g(a)] F'(x).$$

Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{F'(x)}{g'(x)}.$$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(x)$$

* Si $g(x) = x$ para toda $x \in [a, b]$ obtenemos la conclusión del T.V.M.

Demostración.

Definimos $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = [g(b) - g(a)] F(x) - [F(b) - F(a)] g(x).$$

(queremos encontrar $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$).

Como F y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces h también lo es. Además,

$$h(a) = [g(b) - g(a)] F(a) - [F(b) - F(a)] g(a) = g(b)F(a) - F(b)g(a)$$

$$h(b) = [g(b) - g(a)] F(b) - [F(b) - F(a)] g(b) = -g(a)F(b) + F(a)g(b)$$

$$\Rightarrow h(a) = h(b).$$

Por el Teorema de Rolle, existe $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$, es decir,

$$[g(b) - g(a)] F'(x) - [F(b) - F(a)] g'(x) = 0$$

$$\therefore [g(b) - g(a)] F'(x) = [F(b) - F(a)] g'(x) \text{ para alguna } x \in (a, b).$$

Regla de L'Hôpital $\frac{0}{0}$

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)}$ existe y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

Demostración.

Como $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$ existe, tenemos que:

(1) existe un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que $F'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$.

(2) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$.

A partir de (1), sabemos que $F(x)$ y $g(x)$ existen para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en $x=a$. Recordemos que los valores de $F(a)$ y $g(a)$ (en caso de existir) no influyen en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)}$ ni en $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$.

Definimos $F(a)=0$ y $g(a)=0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $F(a)$ y $g(a)$) $\Rightarrow$ F y g son continuas en $x=a$.

• Veamos que $g(x) \neq 0$ para toda $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

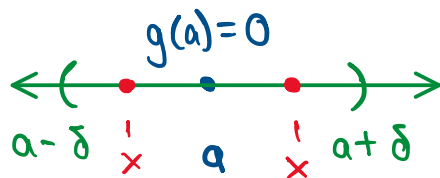
Supongamos que $g(x) = 0$ p.a. $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Sea $x \in (a, a+\delta)$. Como F y g son derivables en $(a, a+\delta)$ (por (1)) y continuas en a , tenemos que F y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) . (*)

Como $g(a) = 0 = g(x)$, aplicando el Teorema de Rolle

al intervalo $[a, x]$, existe $c \in (a, x) \subset (a, a+\delta)$ tal que $g'(c) = 0$! (2)

Análogamente, si $x \in (a-\delta, a)$, aplicando el Teorema de Rolle al intervalo $[x, a]$ obtenemos una contradicción.



Sea $x \in (a, a+\delta)$. Debido a $(*)$, podemos aplicar el T.V.M. Generalizado a las funciones F y g en el intervalo $[a, x]$, por lo que existe $\alpha_x \in (a, x)$ tal que

$$[F(x) - F(a)] g'(\alpha_x) = [g(x) - g(a)] F'(\alpha_x)$$

$$\Rightarrow \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

Análogamente, si $x \in (a-\delta, a)$, aplicando el T.V.M. Generalizado a F y g en $[x, a]$, existe $\alpha_x \in (x, a)$ tal que

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \stackrel{(\Delta')}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

Si $x \rightarrow a$
 $\Rightarrow \alpha_x \rightarrow a$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

(Δ) Demostraremos ahora que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$

$$\text{Sea } L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} \quad (.)$$

$$\text{P.D. } L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por $(.)$, existe $\delta_* > 0$ tal que

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \quad (0 < |x-a| < \delta_* \Rightarrow \left| \frac{F'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon) \quad (**)$$

$$\text{P.D. } \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \quad (0 < |x-a| < \delta_* \Rightarrow \left| \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon)$$

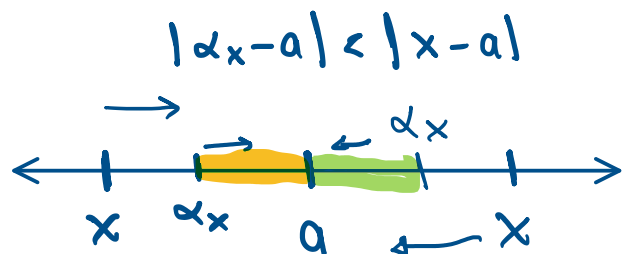
Sea $x \in (a-\delta, a+\delta)$ tal que $0 < |x-a| < \delta_*$, como $0 < |\alpha_x - a| < |x-a|$

$$\Rightarrow 0 < |\alpha_x - a| < \delta_* \Rightarrow \left| \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon. \quad (**)$$

$$\therefore L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = \frac{4}{1} = 4$$



Otras versiones de la regla de L'Hôpital (Indeterminación $\frac{0}{0}$)

(a) Si $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

(b) Si $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

(c) Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

(d) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = L.$$

(e) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \infty.$$

Demostración de (a):

Como $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}$ existe, tenemos que:

- (1) existe un intervalo $(a, a+\delta)$ tal que $F'(x)$ y $g'(x)$ existen para todo $x \in (a, a+\delta)$.
- (2) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, a+\delta)$.

A partir de (1), sabemos que $F(x)$ y $g(x)$ existen para todo $x \in (a, a+\delta)$,

Recordemos que los valores de $F(a)$ y $g(a)$ (en caso de existir) no influyen en $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)}$ ni en $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}$.

Definimos $F(a)=0$ y $g(a)=0$ (cambiando, si es necesario, los valores previos de $F(a)$ y $g(a)$) $\Rightarrow F$ y g son continuas por la derecha en a .

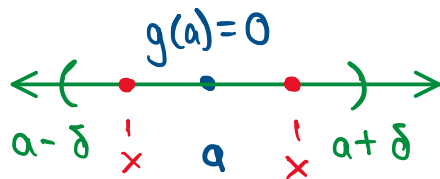
- Veamos que $g(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, a+\delta)$.

Supongamos que $g(x)=0$ p.a. $x \in (a, a+\delta)$.

Sea $x \in (a, a+\delta)$. Como F y g son derivables en $(a, a+\delta)$ (por (1)) y continuas ^{por la derecha} en a , tenemos que F y g son continuas en $[a, x]$ y derivables en (a, x) . (*)

Como $g(a)=0=g(x)$, aplicando el Teorema de Rolle

al intervalo $[a, x]$, existe $c \in (a, x) \subset (a, a+\delta)$ tal que $g'(c)=0$! (2)



Sea $x \in (a, a+\delta)$. Debido a (*), podemos aplicar el T.V.M. Generalizado a las funciones F y g en el intervalo $[a, x]$, por lo que existe $\alpha_x \in (a, x)$ tal que

$$[F(x) - F(a)] g'(\alpha_x) = [g(x) - g(a)] F'(\alpha_x)$$

$$\Rightarrow \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \quad \text{p.c. } x \in (a, a+\delta)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} \stackrel{(\Delta)}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

$$a < \alpha_x < x$$

$$S. \quad x \rightarrow a^+ \Rightarrow \alpha_x \rightarrow a^+$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

(Δ) Demostraremos ahora que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}$

$$\text{Sea } L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)}. \quad (*)$$

$$\text{P.D. } L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por $(*)$, existe $\delta_* > 0$ tal que

$$\forall x \in (a, a+\delta) \quad (0 < x-a < \delta_* \Rightarrow \left| \frac{F'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon) \quad (**)$$

$$\text{P.D. } \forall x \in (a, a+\delta) \quad (0 < x-a < \delta_* \Rightarrow \left| \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon)$$

Sea $x \in (a, a+\delta)$ tal que $0 < x-a < \delta_*$, como $a < \alpha_x < x$
 $\Rightarrow 0 < \alpha_x - a < x - a$

$$\Rightarrow 0 < \alpha_x - a < \delta_* \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \left| \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} - L \right| < \varepsilon.$$

$$\therefore L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$