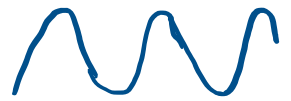


Significado de la derivada.

Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto $x \in A$ es un punto máximo de f en A si

$$f(x) \geq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$



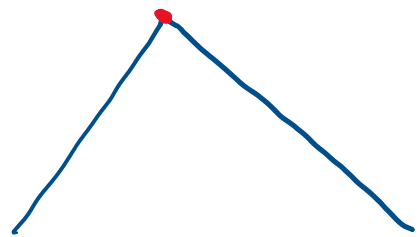
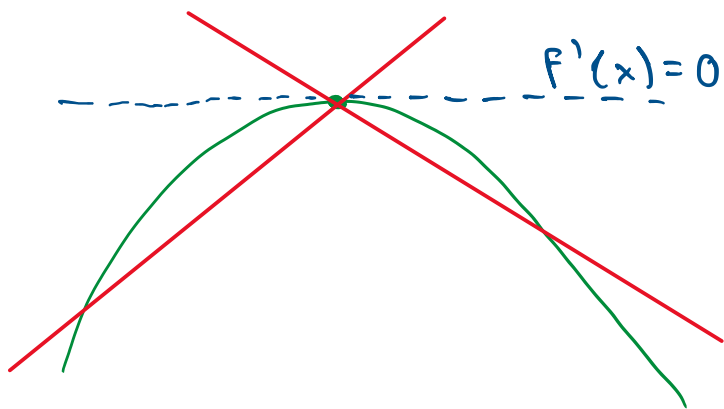
El número $f(x)$ será llamado valor máximo de f en A .

Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto $x \in A$ es un punto mínimo de f en A si

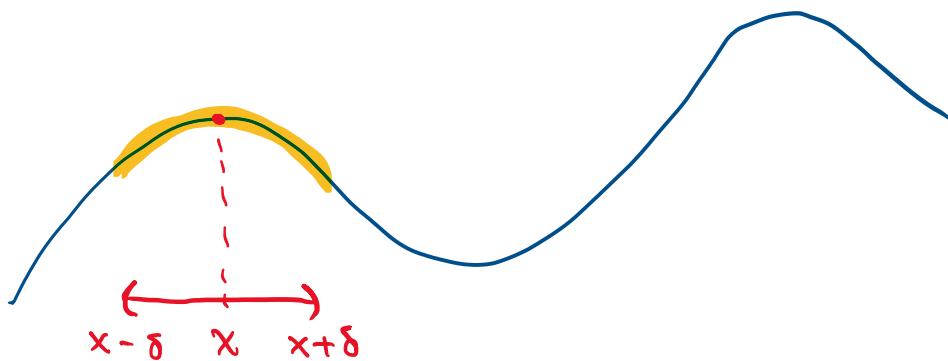
$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

El número $f(x)$ será llamado valor mínimo de f en A .

⊙ Teorema. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Si x es un punto máximo o punto mínimo de f en (a, b) y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.



Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto x de A es un punto máximo local (mínimo local) de f en A si existe $\delta > 0$ tal que x es punto máximo (mínimo) de f en $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.



Teorema. Si x es un punto máximo o mínimo local de f en (a, b) y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

* Si F es constante $\Rightarrow F'(x)=0$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$

* ¿Si $F'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$, entonces F es constante en (a,b) ? Si.

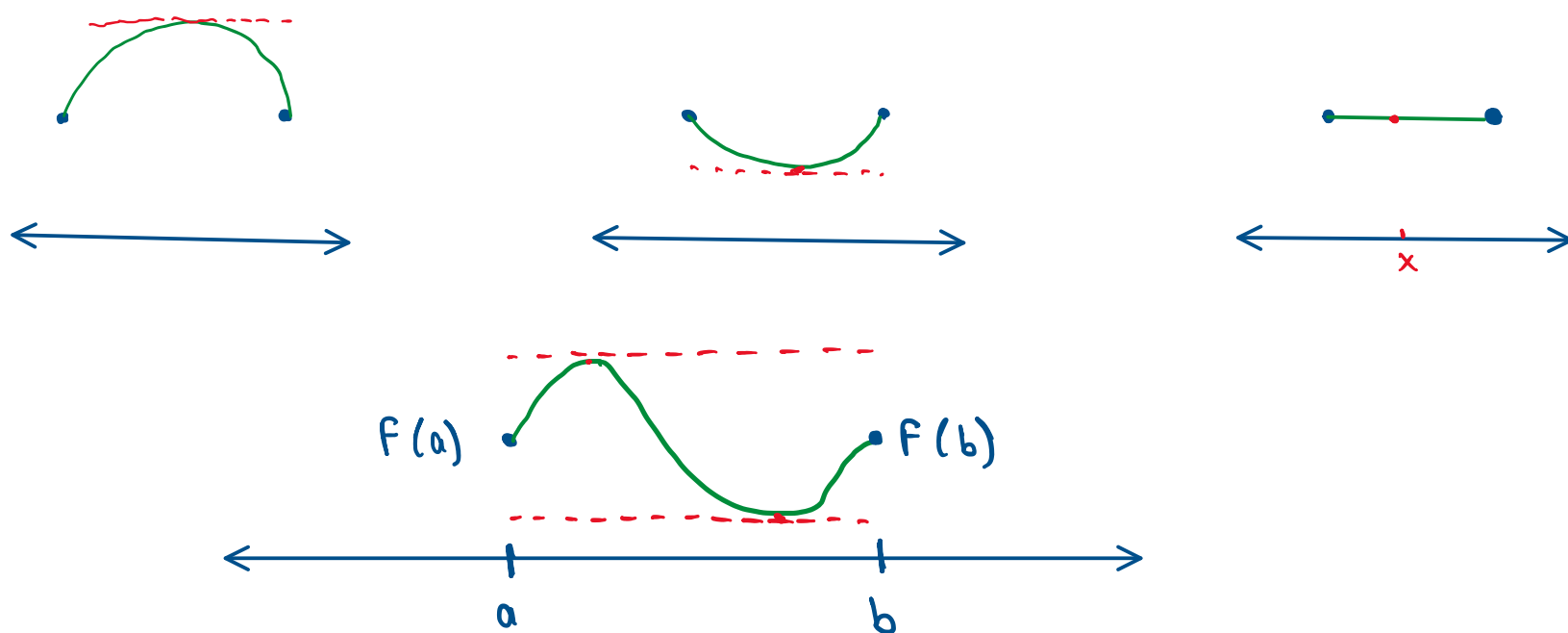
$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 0 \quad \text{¿} F(x+h) = F(x) \text{?}$$

Teorema de Rolle

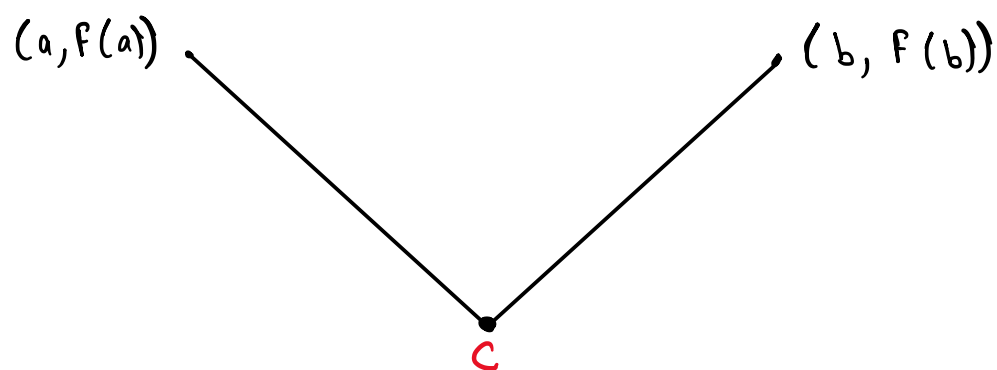
Si F es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $F(a)=F(b)$, entonces existe $x \in (a,b)$ tal que $F'(x)=0$.

Demostración. Como F es continua en $[a,b]$, F tiene al menos un punto máximo y un punto mínimo en $[a,b]$.

- Si F tiene un punto máximo x en (a,b) , como F es derivable en x , por el teorema $\odot$ sabemos que $F'(x)=0$.
- Si F tiene un punto mínimo x en (a,b) , como F es derivable en x , por el teorema $\odot$ sabemos que $F'(x)=0$.
- Si el punto máximo y el punto mínimo de F en $[a,b]$ se encuentran en los extremos del intervalo (a y b), como $F(a)=F(b)$, tenemos que el valor máximo y mínimo de F coinciden, así que F es constante en $[a,b]$.
 $\Rightarrow F'(x)=0$ para toda $x \in (a,b)$.

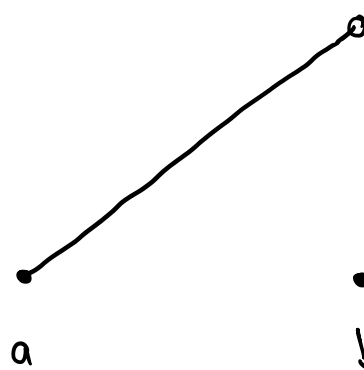


* Es necesario que F sea continua en todo punto de $[a, b]$ y derivable en todo punto de (a, b) .



F no es derivable en c

No existe $x \in (a, b)$ t.q. $F'(x) = 0$



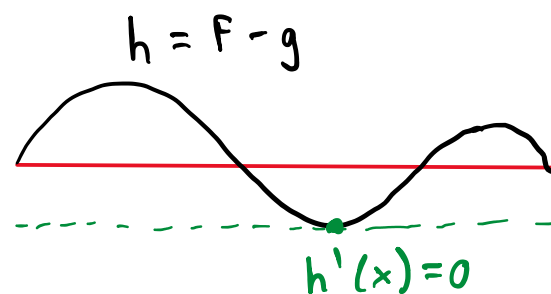
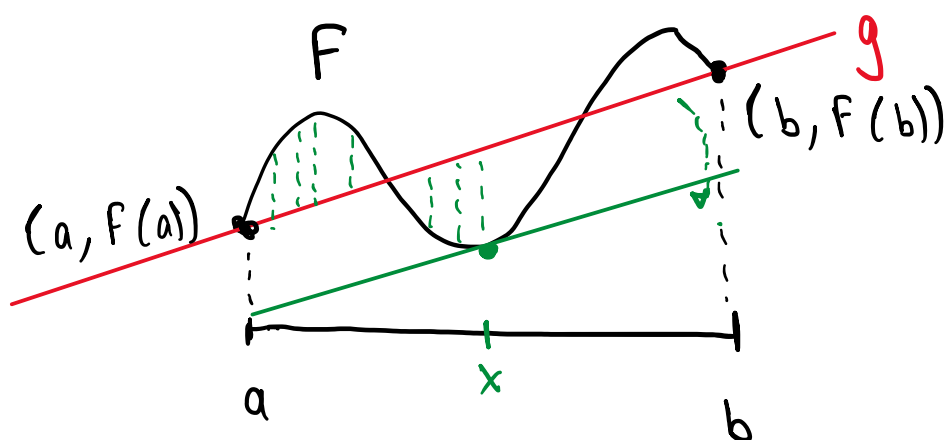
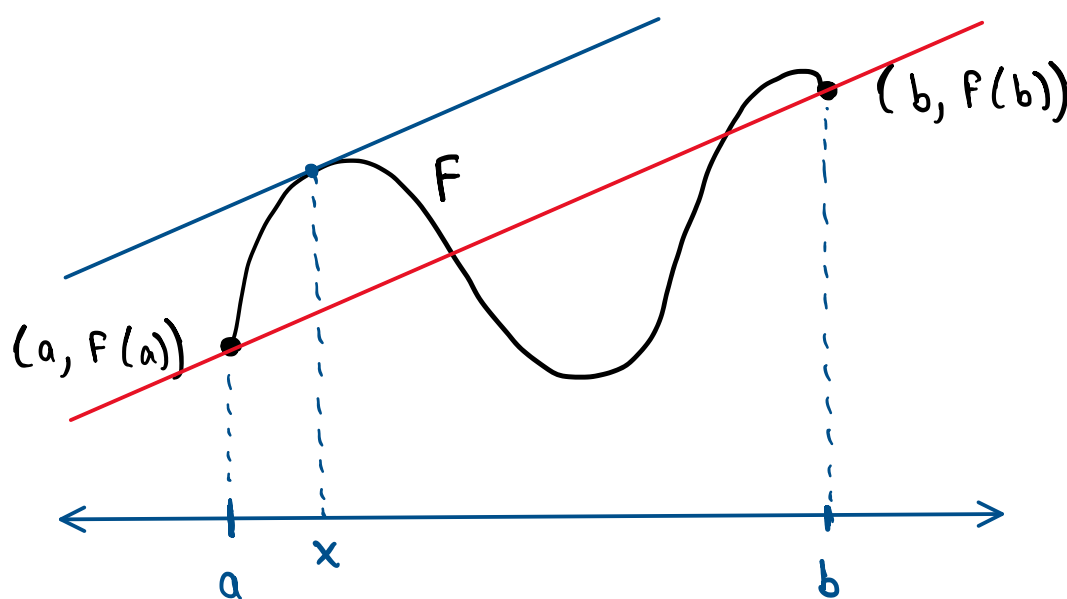
F no es continua en b .

No existe $x \in (a, b)$ t.q. $F'(x) = 0$

Teorema del Valor Medio (T.V.M.)

Si F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $x \in (a, b)$ tal que

$$F'(x) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \leftarrow \text{pendiente de la recta que pasa por } (a, F(a)) \text{ y } (b, F(b))$$



Ecuación de la recta que pasa por $(a, F(a))$ y $(b, F(b))$:

Pendiente

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - F(a) = \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (x - a)$$

$$y = \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (x - a) + F(a)$$

Demostración del T.V.M.

Sea $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función lineal cuya gráfica (recta) pasa por los puntos $(a, F(a))$ y $(b, F(b))$, es decir,

$$g(x) = \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (x - a) + F(a)$$

Definimos $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = F(x) - g(x)$

$$h(x) = F(x) - \underbrace{\left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (x - a) + F(a)}_{\text{constante}}$$

Como F y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , entonces h también lo es. Además,

$$h(a) = F(a) - \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (a - a) - F(a) = F(a) - 0 - F(a) = 0$$

$$h(b) = F(b) - \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (b - a) - F(a) = F(b) - F(b) + F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow h(a) = h(b).$$

Por el Teorema de Rolle, existe $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$

$$\Rightarrow h'(x) = F'(x) - \left[\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right] (1) = 0$$

$$\therefore F'(x) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{para alguna } x \in (a, b).$$

F derivable en $a \Rightarrow F$ continua en a .

T.V.M.

$$\bullet F \text{ continua en } [a, b] \text{ y derivable en } (a, b) \Rightarrow \exists x \in (a, b) \quad F'(x) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Corolario. Si F está definida en un intervalo I y $F'(x) = 0$ para toda x en el intervalo, entonces F es constante en dicho intervalo.

Demostración.

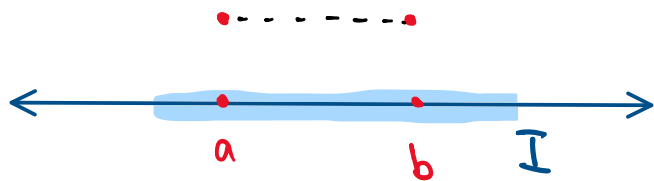
Sean a y b dos puntos distintos del intervalo. P.D. $F(a) = F(b)$.

S.p.g. supongamos que $a < b$. Como $a, b \in I \Rightarrow [a, b] \subset I$. Sabemos que F es derivable en x para todo $x \in I \Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Por el T.V.M., existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 = F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow 0 = F(b) - F(a) \Rightarrow F(a) = F(b).$$

$\therefore F$ es constante en I .



Corolario. Si f y g son funciones definidas en el mismo intervalo I y $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$.

Demostración

Sea $h = f - g \Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para toda $x \in I$.

Por el corolario anterior, h es constante, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$h(x) = c \text{ para toda } x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = c$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + c \text{ para toda } x \in I.$$

Definición

Una función F es creciente (estrictamente creciente) en A si

$$\forall x, y \in A \quad (x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y))$$
$$(x < y \Rightarrow F(x) < F(y))$$

Una función F es decreciente (estrictamente decreciente) en A si

$$\forall x, y \in A \quad (x < y \Rightarrow F(x) \geq F(y))$$
$$(x < y \Rightarrow F(x) > F(y))$$

Corolario

- (1) Si $f'(x) > 0$ para toda x en un intervalo I , entonces F es estrictamente creciente en dicho intervalo.
- (2) Si $f'(x) \geq 0$ para toda x en un intervalo, entonces F es creciente en dicho intervalo.
- (3) Si $f'(x) < 0$ para toda x en un intervalo, entonces F es estrictamente decreciente en dicho intervalo.
- (4) Si $f'(x) \leq 0$ para toda x en un intervalo, entonces F es decreciente en dicho intervalo.

Demostración.

- (1) Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. P.D. $F(a) < F(b)$.

Como $a, b \in I \Rightarrow [a, b] \subset I$. Sabemos que

F es derivable en x para todo $x \in I \Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Por el T.V.M., existe $c \in (a, b)$ tal que

$$0 < F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

hipótesis $\Rightarrow \frac{F(b) - F(a)}{b - a} > 0$

$$\text{Como } a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Rightarrow F(b) > F(a)$$

$\therefore F$ estrictamente creciente.

(2) Sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. P.D. $F(a) \leq F(b)$.

Como $a, b \in I \Rightarrow [a, b] \subset I$. Sabemos que

F es derivable en x para todo $x \in I \Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Por el T.V.M., existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \\ \text{hipótesis} \quad &\Rightarrow \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Como } a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0 \Rightarrow F(b) \geq F(a)$$

$\therefore F$ es creciente.

(3) y (4): ejercicio.

* F estrictamente creciente en $I \not\Rightarrow F'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

$$F: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = x^3$$

F es estrictamente creciente en $(-1, 1)$, pero $F'(0) = 0$.

