

Teorema (Reglas de derivación)

Si f y g son funciones derivables en x entonces

1) $f+g$ es derivable en x y $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2) fg es derivable en x y $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

3) si $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es derivable en x y $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

4) si $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en x y $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

5) si $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en x y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ y $f: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces

$f \circ g$ es derivable en a y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Las reglas de derivación anteriores pueden resumirse así:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = uv' + u'v \quad (\text{regla del producto})$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2} \quad (\text{regla del cociente})$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{regla de la cadena})$$

Probamos que si $F(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $F'(x) = \cos x$
si $F(x) = \cos x$, entonces $F'(x) = -\operatorname{sen} x$

Otra notación que podemos utilizar es

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \qquad \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$$

En general, podemos escribir $\frac{d}{dx} F(x)$ para denotar a la derivada de una función $F(x)$.

Recordemos que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Utilizando la regla del cociente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x (\cos x) - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

De manera similar podemos demostrar que

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

(Ejercicio).

- Sabemos que $\frac{d}{dx} x = 1$
- Demostrar que $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(Por inducción sobre n)

(Base $n=1$)

$$\frac{d}{dx} x^1 = \frac{d}{dx} x = 1 = 1 x^0 = 1 x^{1-1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{n+1} = \frac{d}{dx} (x^n \cdot x) = x^n (1) + n x^{n-1} (x) \quad (\text{regla del producto})$$

$$= x^n + n x^n = (n+1) x^n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1) x^n$$

$$\therefore \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

- Demostrar que $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. $x \neq 0$

Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Definimos $k = -n \Rightarrow k \in \mathbb{N}$ y $n = -k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} x^{-k} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^k} \right) = \frac{x^k (0) - 1 (k x^{k-1})}{(x^k)^2} = \frac{-k x^{k-1}}{x^{2k}} = -k x^{-k-1} \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (x \neq 0)$$

* Si $n=0$ $\frac{d}{dx} x^0 = \frac{d}{dx} 1 = 0 = 0 x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1}$

si $x \neq 0$

La fórmula $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ es válida incluso si $n \notin \mathbb{Z}$.

(se demostrará usando funciones exponenciales en Cálculo II)

Aún no conocemos el significado de

$$2^{\sqrt{3}} \quad \text{o} \quad 5^{\pi}.$$

* Regla de la cadena

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Calcular la derivada de las siguientes Funciones:

1) $F(x) = \sin(5x)$

$$\sin^n x = (\sin x)^n$$

$$F'(x) = \cos(5x) \cdot (5) = 5 \cos(5x)$$

2) $F(x) = \cos(x^2)$

$$F'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x = -2x \sin(x^2)$$

3) $F(x) = \sin^2(x^4) = [\sin(x^4)]^2$

$$F'(x) = 2[\sin(x^4)]' \cdot \cos(x^4) \cdot (4x^3) = 8x^3 \sin(x^4) \cos(x^4)$$

4) $F(x) = \tan^5(\sec(x^{-4}))$

$$F'(x) = 5[\tan(\sec(x^{-4}))]^4 \cdot \sec^2(\sec(x^{-4})) \cdot \sec(x^{-4}) \tan(x^{-4}) \cdot (-4x^{-5})$$

~~$$\sec \cdot \tan(x^{-4})$$~~

$$= -20x^{-5} \tan^4(\sec(x^{-4})) \cdot \sec^2(\sec(x^{-4})) \cdot \sec(x^{-4}) \cdot \tan(x^{-4})$$

$$\uparrow$$
$$\neq \sec^3(x^{-4}).$$

Significado de la derivada.

Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto $x \in A$ es un punto máximo de f en A si

$$f(x) \geq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

El número $f(x)$ será llamado valor máximo de f en A .

Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto $x \in A$ es un punto mínimo de f en A si

$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

El número $f(x)$ será llamado valor mínimo de f en A .

Teorema. Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Si x es un punto máximo o punto mínimo de f en (a, b) y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Demostración. Sup. que x es punto máximo.

Recordemos que $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Sea $h \neq 0$ tal que $x+h \in (a, b)$.

Como x es un punto máximo de f en (a, b) , sabemos que

$$f(x+h) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x) \leq 0$$

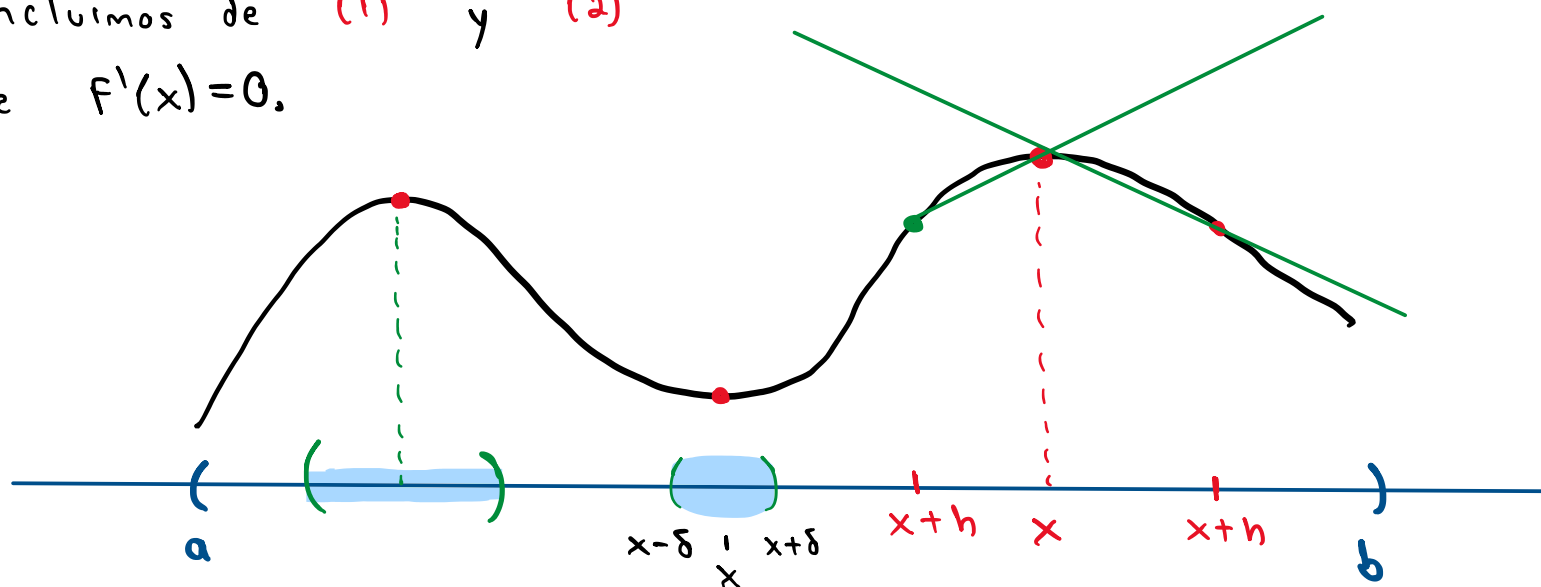
$$\bullet \text{ Si } h < 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0, \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Si } h > 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0, \quad (2)$$

Concluimos de (1) y (2)
que $f'(x)=0$.

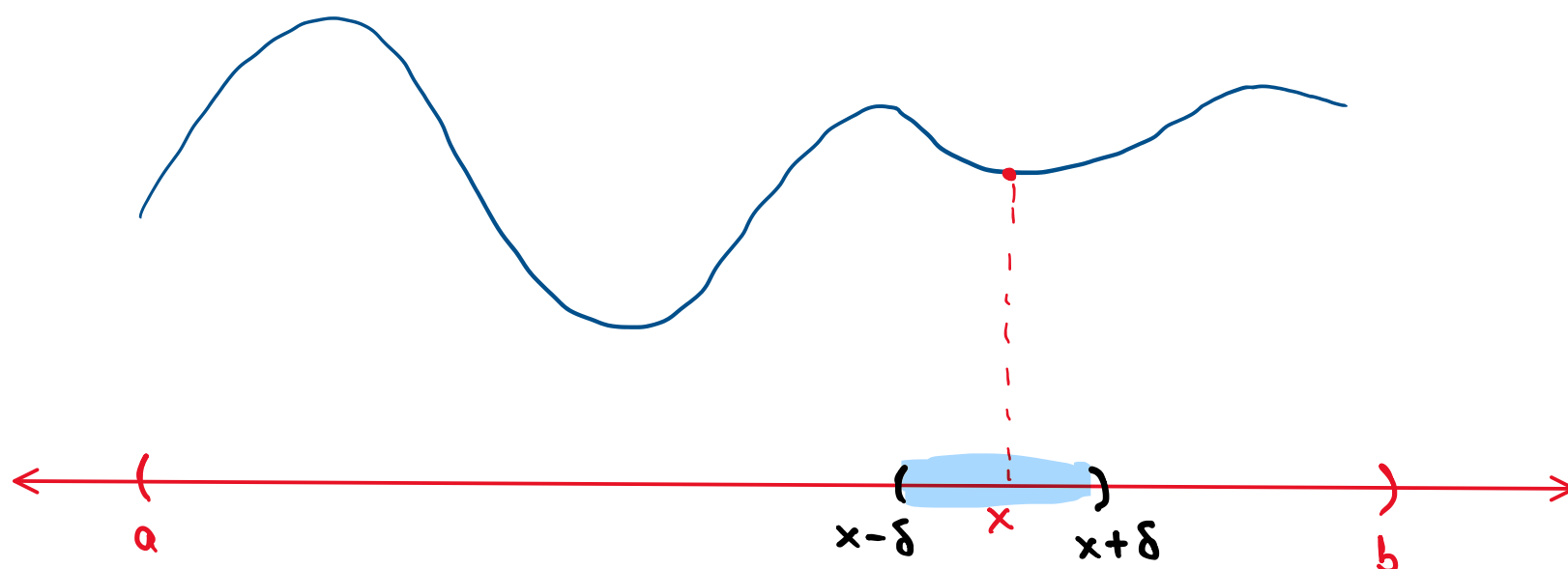


Definición. Sean $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A \subseteq D$. Un punto x de A es un punto máximo local (mínimo local) de f en A si existe $\delta > 0$ tal que x es punto máximo (mínimo) de f en $A \cap (x-\delta, x+\delta)$.

Teorema. Si x es un punto máximo o mínimo local de f en (a, b) y f es derivable en x , entonces $f'(x)=0$.

Demostración

Como x es punto máximo (mínimo) local de f en (a, b) , existe $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo (mínimo) de f en $(a, b) \cap (x-\delta, x+\delta)$, el cual es un intervalo abierto. Por el teorema anterior concluimos que $f'(x)=0$.



* Si $F'(x)=0 \not\Rightarrow x$ es máximo o mínimo local de F

$$F(x) = x^3$$

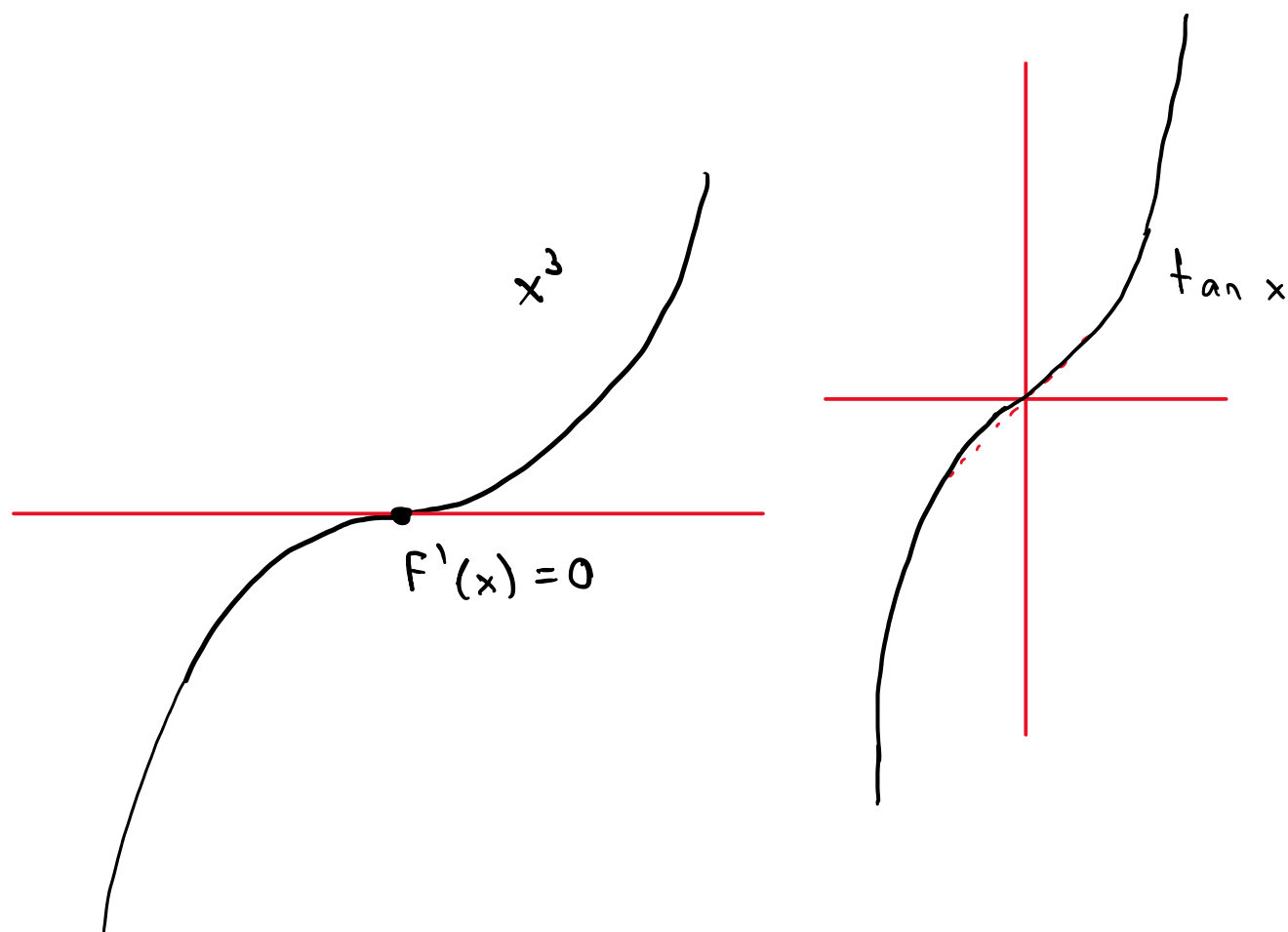
$$F'(x) = 3x^2$$

$F'(0)=0$, pero 0 no es máximo ni mínimo local de F .

$$F(x) = \tan x$$

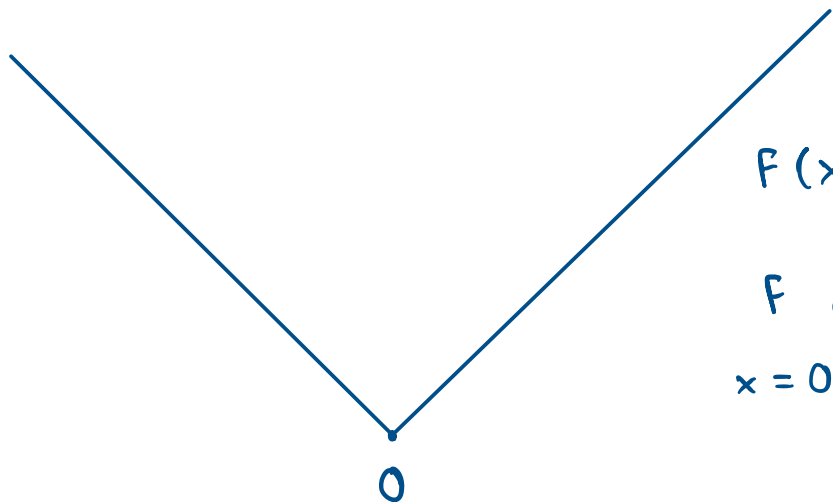
$$F'(x) = \sec^2 x$$

$$F'(0) = 1$$



Definición. Si $F'(x)=0$, pero x no es máximo ni mínimo local, entonces x es un punto silla de F .

* Puede ocurrir que x sea punto máximo o mínimo de F y F no sea derivable en x .



$$F(x) = |x|$$

F no es derivable en $x=0$

$x=0$ es punto mínimo de F en $\mathbb{R}$