

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 1 \cdot \left[\frac{0}{1+1} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

• Sea $f(x) = \sin x$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \sin(h) \cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \right] \\ &= \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot (0) + \cos(x) (1) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = \cos(x)$$

Ejercicio: demostrar que si $F(x) = \cos(x)$, entonces $F'(x) = -\sin(x)$.

* Utilizar que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

Teorema (Reglas de derivación)

Si F y g son funciones derivables en x entonces

1) $F+g$ es derivable en x y $(F+g)'(x) = F'(x) + g'(x)$

2) Fg es derivable en x y $(Fg)'(x) = F(x)g'(x) + F'(x)g(x)$

3) si $c \in \mathbb{R}$, entonces cF es derivable en x y $(cF)'(x) = c \cdot F'(x)$

4) si $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es derivable en x y $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

5) si $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{F}{g}$ es derivable en x y

$$\left(\frac{F}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)F'(x) - F(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demostración.

1) $(F+g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + g(x+h) - [F(x) + g(x)]}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = F'(x) + g'(x)$$

2) $(Fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)g(x+h) - F(x)g(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)g(x+h) - F(x+h)g(x) + F(x+h)g(x) - F(x)g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) [g(x+h) - g(x)] + g(x) [F(x+h) - F(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{[F(x+h) - F(x)]}{h} \\
&= F(x) g'(x) + g(x) F'(x)
\end{aligned}$$

F derivable en x
 $\Rightarrow F$ continua en x

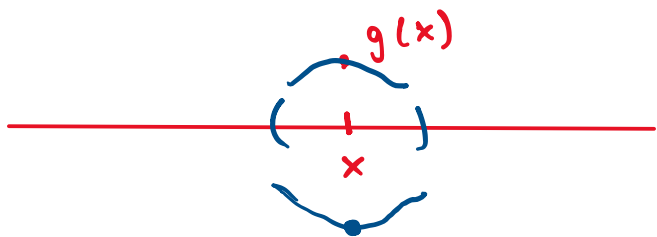
$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h)$$

3) Debido a 2 aplicado a la Función constante c y la función F :

$$(cF)'(x) = c F'(x) + F(x) (0) = c F'(x)$$

$\uparrow$
derivado de una constante.

4) Sup. que $g(x) \neq 0$. Como g es continua en x (por ser derivable), entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall h$ ($|h| < \delta \Rightarrow g(x+h) \neq 0$)



$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x+h) g(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x+h)} \cdot \left[- \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot [-g'(x)] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

5) Supongamos nuevamente que $g(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) + f'(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x)$$

$$= f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} + f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{-f(x)g'(x) + f'(x)g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Las reglas de derivación anteriores pueden resumirse así:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = uv' + u'v \quad (\text{regla del producto})$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2} \quad (\text{regla del cociente})$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ y $F: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si g es derivable en a y F es derivable en $g(a)$, entonces $F \circ g$ es derivable en a y

$$(F \circ g)'(a) = F'(g(a)) \cdot g'(a)$$

Demostración

Idea:

$$(F \circ g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(g(x)) - F(g(a))}{\underbrace{g(x) - g(a)}_{*}} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

Se parece a $F'(g(a)) = \lim_{x \rightarrow g(a)} \frac{F(x) - F(g(a))}{x - g(a)}$

* Aunque $x \neq a$, puede ocurrir que $g(x) = g(a)$.

Definimos $\phi: A = \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{g(x) - g(a)} & \text{si } g(x) \neq g(a) \\ F'(g(a)) & \text{si } g(x) = g(a) \end{cases}$$

Observemos que

$$\boxed{\frac{F(g(x)) - F(g(a))}{x - a} = \phi(x) \cdot \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]} \quad (\Delta) \quad \text{para toda } x \in \text{Dom}(g) = A, \ x \neq a$$

• Si $g(x) \neq g(a)$ se cancela $g(x) - g(a)$

$$\Rightarrow \phi(x) \cdot \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = \left[\frac{F(g(x)) - F(g(a))}{\cancel{g(x) - g(a)}} \right] \cdot \left[\frac{\cancel{g(x) - g(a)}}{x - a} \right]$$

• Si $g(x) = g(a) \Rightarrow F(g(x)) = F(g(a)) \Rightarrow \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0$ (izq.)

y $\phi(x) \cdot \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = F'(g(a)) \cdot \left[\frac{0}{x - a} \right] = 0$. (derecha)

(en ambos lados el resultado es cero).

Demostremos que $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = F'(g(a))$

Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(\phi) \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - F'(g(a))| < \varepsilon$
 $= \text{Dom}(g)$

Como F es derivable en $g(a)$, sabemos que

$$\lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{F(y) - F(g(a))}{y - g(a)} = F'(g(a))$$

Como $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall y \in D_F \quad (0 < |y - g(a)| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(g(a))}{y - g(a)} - F'(g(a)) \right| < \varepsilon) \quad (*)$$

Por otro lado, como g es derivable en $a \Rightarrow g$ es continua en a .

Luego, para $\delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in D_g \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1) \quad (**)$$

Sea $x \in \text{Dom}(\phi) = \text{Dom}(g)$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

P.D. $|\phi(x) - F'(g(a))| < \varepsilon$

Como $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1$
 $(**)$

• Si $g(x) \neq g(a) \Rightarrow 0 < |g(x) - g(a)| < \delta_1$

$$\Rightarrow | \phi(x) - F'(g(a)) | = \left| \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{g(x) - g(a)} - F'(g(a)) \right| < \varepsilon.$$

(*)

• Si $g(x) = g(a) \Rightarrow | \phi(x) - F'(g(a)) | = | F'(g(a)) - F'(g(a)) | = 0 < \varepsilon.$

En cualquier caso, $| \phi(x) - F'(g(a)) | < \varepsilon.$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = F'(g(a)).$$

Usando (Δ):

$$(F \circ g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(g(x)) - F(g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \cdot \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= F'(g(a)) \cdot g'(a)$$

$$\therefore (F \circ g)'(a) = F'(g(a)) \cdot g'(a).$$