

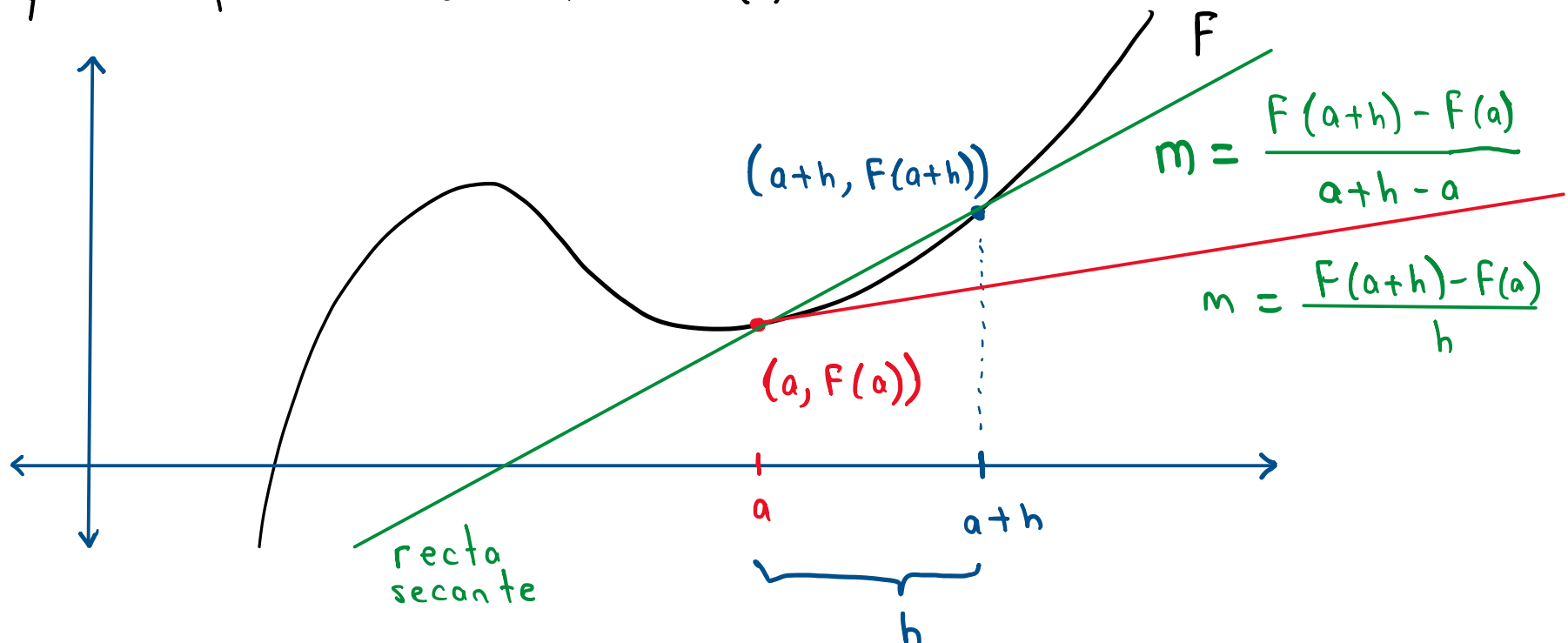
Funciones derivables

miércoles, 15 de diciembre de 2021

Definición. Una función F es derivable en a si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \text{ existe.}$$

En este caso, al límite anterior le llamaremos la derivada de F en a y lo representaremos mediante $F'(a)$.



Demstrar que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h)$

$$\text{P.D. } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = L \iff \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = L$$

$$* \text{ Dom}(F(a+h)) = \{h \mid a+h \in \text{Dom}(F)\}$$

$$\Rightarrow] \text{ Sup. que } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = L. \quad \text{P.D. } \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = L.$$

$$\text{Sea } \varepsilon > 0. \text{ P.D. } \exists \delta > 0 \quad \forall h \in D_{F(a+h)} \quad (0 < |h-0| < \delta \Rightarrow |F(a+h) - L| < \varepsilon)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in D_F \quad (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon) \quad (*)$$

Sea $h \in D_{f(a+h)}$ tal que $0 < |h-0| < \delta \Rightarrow 0 < |h| < \delta \Rightarrow 0 < |(a+h)-a| < \delta$

$$\Rightarrow |F(a+h) - L| < \varepsilon$$

(*)

(Estamos aplicando (*) a $x=a+h$)

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h) = L$$

$\Leftarrow$] (Ejercicio)

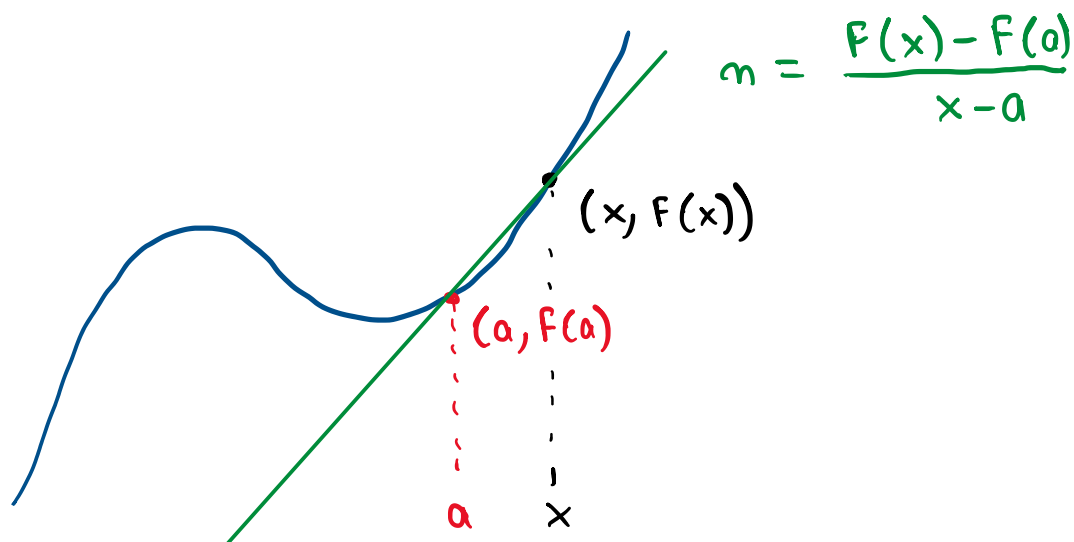
$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} F(a+h)$$

$$\text{Sea } g(x) = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \quad \forall x \in D_F \setminus \{a\}$$

Por la igualdad anterior, si F es derivable en a , entonces

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\underline{a+h}) - F(a)}{(\underline{a+h}) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$\therefore F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$



- Si $f(x) = c$ es constante, entonces $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Si $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

- Si $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f no es derivable en 0.

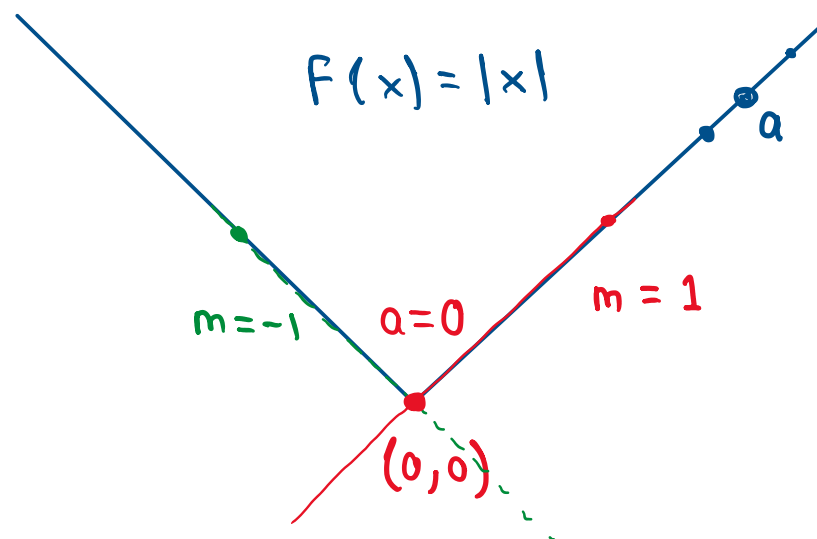
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \quad (\text{porque } h < 0)$$

$$= -1$$

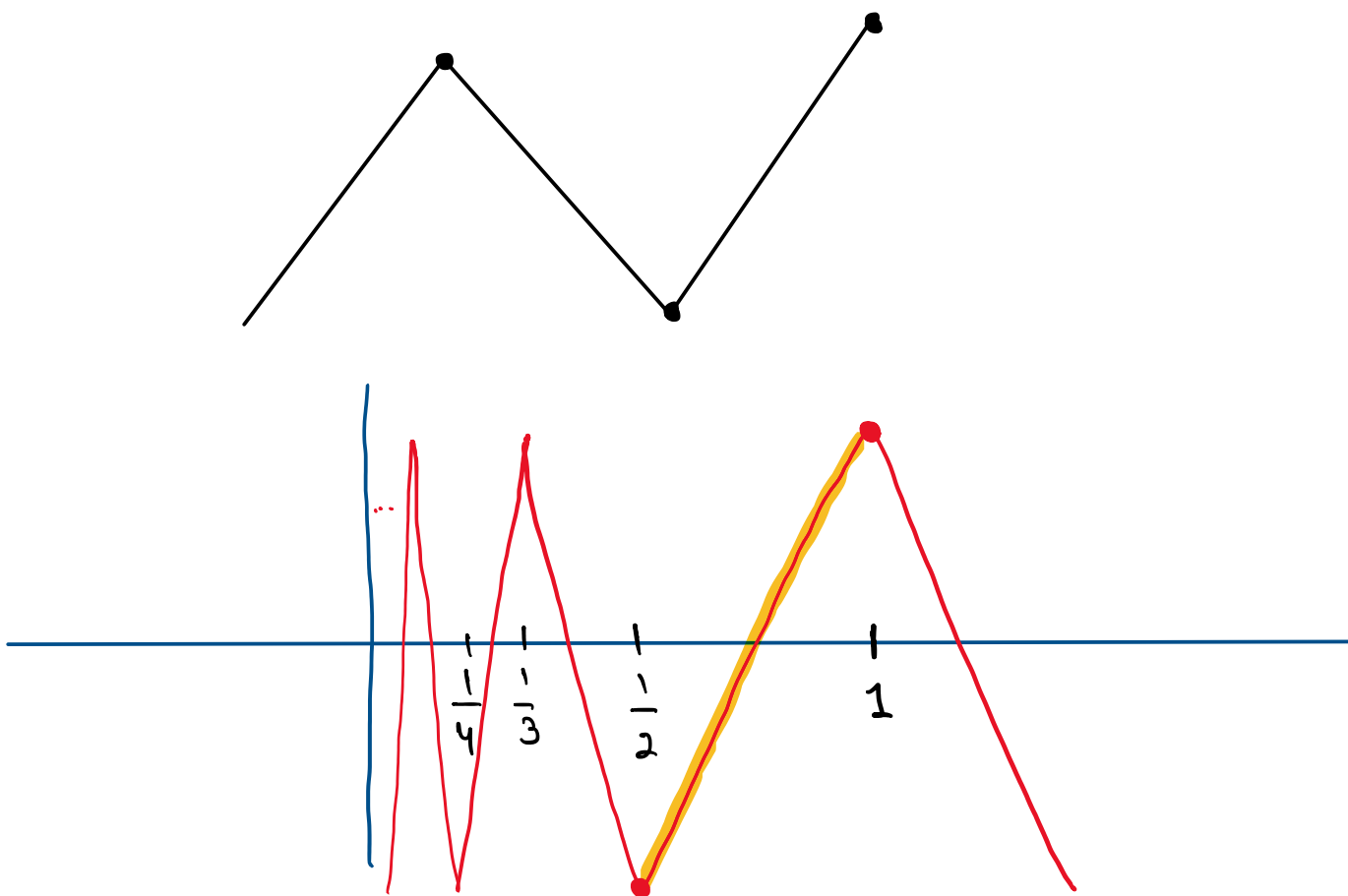
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \quad (\text{porque } h > 0)$$

$$= 1$$

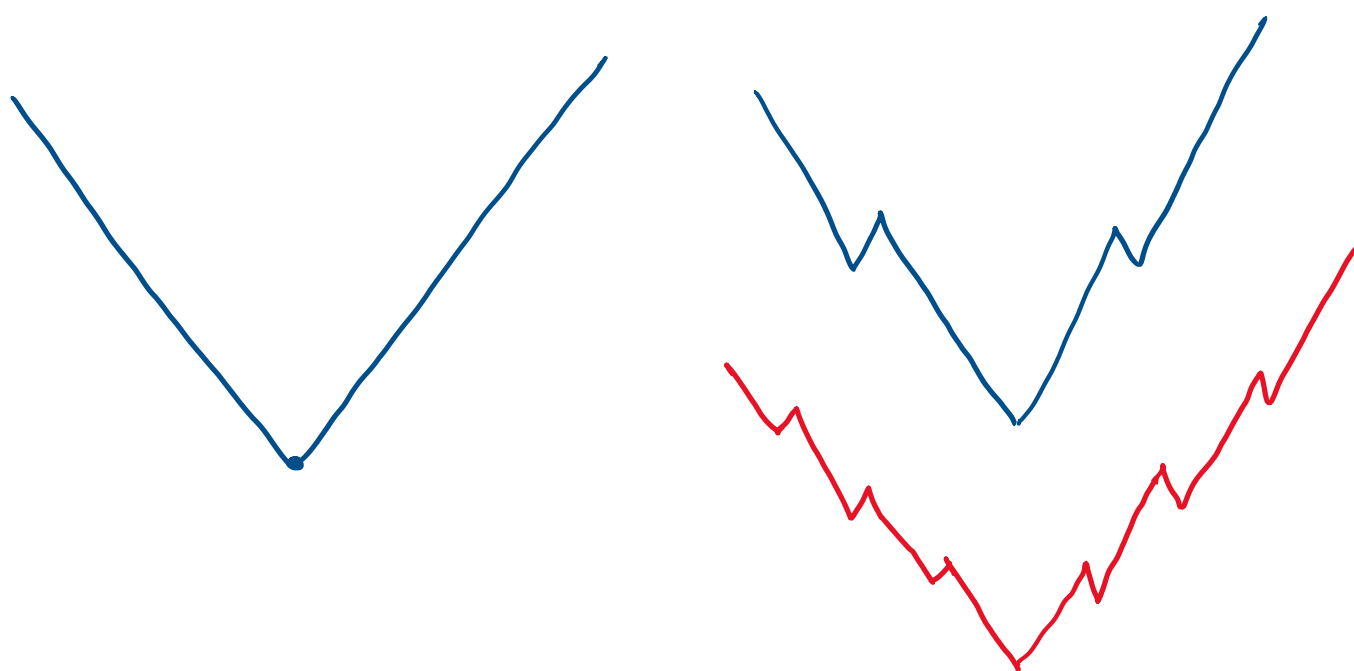
$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ no existe $\therefore f$ no es derivable en 0.



* La Función $F(x)=|x|$ es continua en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en 0.
 F continua en $a \not\Rightarrow F$ derivable en a .



* Existen Funciones que son continuas en $\mathbb{R}$ y derivables en ningún punto (se pueden construir usando series en Cálculo II).



Teorema Si f es derivable en a , entonces f es continua en a .

Demostración

P.O. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= \underline{f'(a)} \cdot (a - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0 \stackrel{*}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$\therefore f$ es continua en a .

* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = 0$

$\Rightarrow$ Sup. que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0.$$

$\Leftarrow$ Sup. que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} ([f(x) - L] + L) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] + \lim_{x \rightarrow a} L = 0 + L = L$$

f derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a

$\nLeftarrow$

$$f(x) = |x|$$

• Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

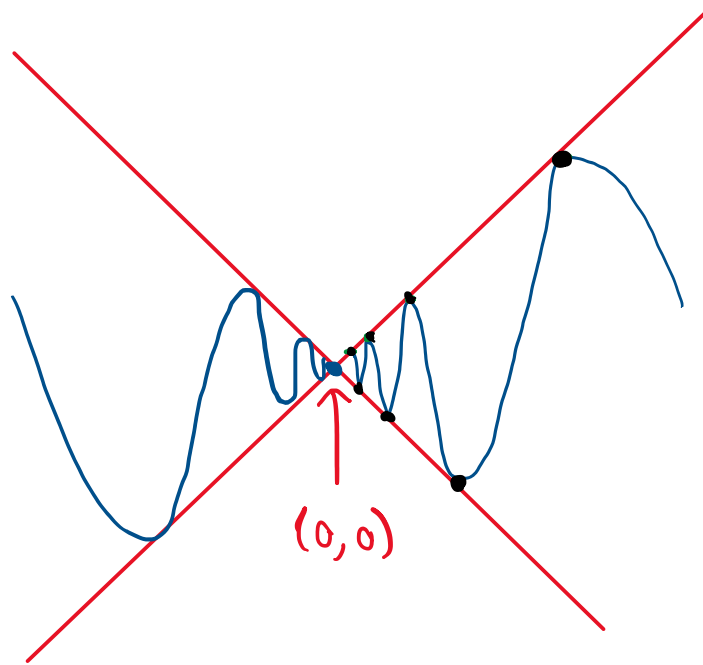
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

* Sabemos que f es continua en 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \quad \text{no existe}$$

$\therefore f$ no es derivable en $a=0$.



• Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

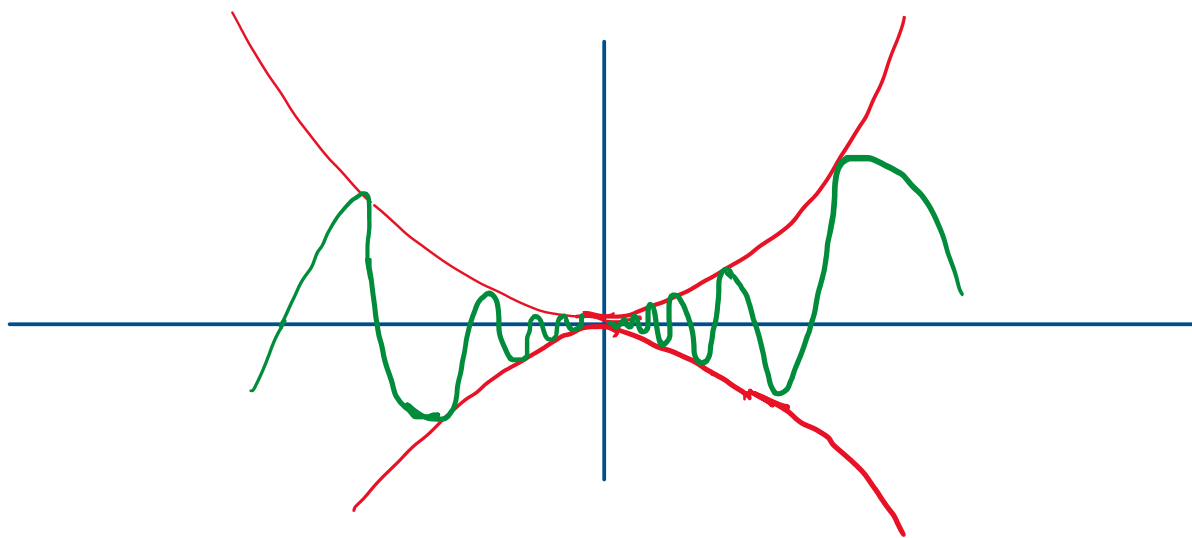
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underline{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)} = 0$$

$$\therefore F'(0) = 0$$

* Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$ y g es una función acotada, entonces $\lim_{x \rightarrow a} F(x)g(x) = 0$.



Ejercicio: si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una Función tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -x^2 \leq F(x) \leq x^2 \quad (\text{o, equivalentemente, } |F(x)| \leq x^2),$$

entonces F es derivable en 0 y $F'(0) = 0$.

