Ejercicios de límites de funciones y continuidad (segunda parte)

viernes, 7 de enero de 2022

Ejercicio. A partir de la definición de límite de una función, demuestra que:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$

$$\left(\left| \frac{x^3}{|x|} - 0 \right| = \left| \frac{x^3}{|x|} \right| = \frac{|x^3|}{||x||} = \frac{|x|^3}{|x|} = |x|^2 < \varepsilon \right)$$

Definimos $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Si $x \in D_f$ t.q. $0 < |x - 0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^3}{|x|} - 0 \right| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0. \quad \blacksquare$$

2) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) = 3$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left(\left| \left(x^2 + \frac{2}{x} \right) - 3 \right| = \left| \frac{x^3 - 3x + 2}{x} \right| = \left| \frac{(x+2)(x-1)^2}{x} \right| = \frac{|x+2|\,|x-1|^2}{|x|} < \varepsilon \right)$$

Si $|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1$

$\Rightarrow 0 < 2 < x + 2 < 4$

$\Rightarrow |x + 2| = x + 2 < 4$

$\Rightarrow |x + 2| < 4$

Si $|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < x = |x|$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < 2$

Definimos $\delta = \min\left\{ \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}} \right\} > 0$. Si $x \in D_f$ es t.q. $0 < |x - 1| < \delta$

$$\Rightarrow \quad |x-1| < \delta \leq \frac{1}{2}, \qquad |x-1| < \delta < 1 \qquad y \qquad |x-1| < \delta \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{8}}$$

$$\Rightarrow \left| \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) - 3 \right| = \frac{1}{|x|} \cdot |x+2| \cdot |x-1|^2 < 2 \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{8}}\right)^2 = 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\Rightarrow \left| \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} x^2 + \frac{2}{x} = 3 \quad \blacksquare$$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{1+\cos^2 x} = 0.$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left(\left| \frac{x}{1+\cos^2 x} - 0 \right| = \frac{|x|}{|1+\cos^2 x|} < \varepsilon \right)$$

Recordamos que $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad |\cos^2 x| \leq 1 \qquad \text{con} \quad \cos^2 x \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 1 + \cos^2 x = |1 + \cos^2 x|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|1+\cos^2 x|} \leq 1$$

Definimos $\delta = \varepsilon > 0$ y sea $x \in D_f$ t. q. $0 < |x - 0| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{1+\cos^2 x} - 0 \right| = \frac{1}{|1+\cos^2 x|} \cdot |x| < 1 \cdot \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{1+\cos^2 x} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x}{1+\cos^2 x} = 0 \quad \blacksquare$$

Ejercicio. Determina los límites de las siguientes funciones:

1) $\lim_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2} + \frac{x-a}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$-$

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{2}\, 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\frac{1}{2}\, x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Guía 4 Ej 3 (c)

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+h-a}{2}\right)}{\left(\frac{a+h-a}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{a+h+a}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)$$

Guía 4 Ej 8

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(bx)}{bx}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

función continua

visto en clase

$$= 1 \cdot \cos(a+0)$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \cos a \quad //$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x - 3x}{x^2+x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - 3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2 x}{x^2+x} - \frac{3x}{x^2+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2 x}{x^2+x} - \frac{3}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{x(x+1)} - \frac{3}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+1}\right)$$

continua en 0

$$= \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right) - \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x+1}}_{3}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}}_{1} - 3$$

continua en 0 continua en 0

$$= -3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x - 3x}{x^2+x} = -3 \;//$$

3) $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x+4} + x\right)$

Las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = x$ son continuas en $x = 4$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\sqrt{x+4} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad y \quad \lim_{x\to 4} x = 4$$

Ya que los límites existen, también existen los límites laterales

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4^+}\left(\sqrt{x+4} + x\right) = \lim_{x\to 4^+}\sqrt{x+4} + \lim_{x\to 4^+} x$$

$$= \lim_{x\to 4}\sqrt{x+4} + \lim_{x\to 4} x$$

$$= \lim_{x\to 4} \sqrt{x+4} + \lim_{x\to 4} x$$

$$= \sqrt{8} + 4 \; //$$

4) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3} \right)$

$$\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3} = \left(\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+3}}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{(x^2-3) - (x^2+3)}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+3}} < 0 \qquad \forall x > \sqrt{3}$$

Si $x > \sqrt{3} \implies 0 < x^2 < x^2 + 3$ y $0 < x^2 - 3$

$$\implies x = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+3} \quad \text{y} \quad 0 < \sqrt{x^2-3}$$

$$\implies 0 < x < \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-3}$$

$$\implies 0 < \frac{1}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-3}} < \frac{1}{x}$$

$$\implies -\frac{6}{x} < \frac{-6}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-3}} < 0$$

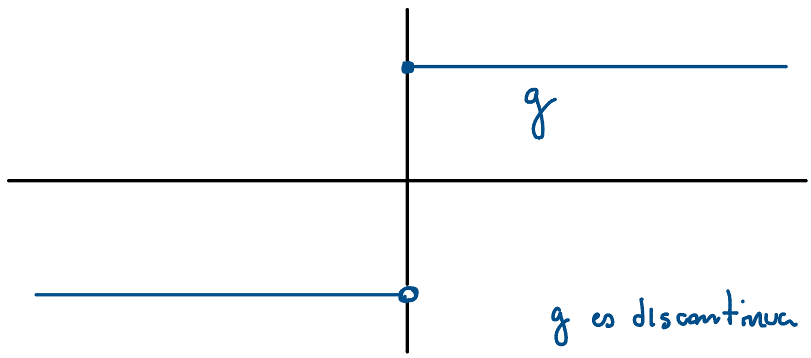
$$\implies 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-3}} \leq \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

Por el teorema de compresión se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3} = 0 . \; //$$

Ejercicio. Falso o verdadero con argumento:

Si f es continua y g es discontinua entonces $g \circ f$ es discontinua



g es discontinua