

Ejercicios de límites de funciones y continuidad

jueves, 6 de enero de 2022

Ejercicio 21. Sea f de Lipschitz, es decir, existe $M > 0$ t. q.

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|. \quad (*)$$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \text{con } |x - y| < \delta \dots$$

Basta acotar $|x - y|$ para acotar $|f(x) - f(y)|$.

Ejercicio 21. Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos x = 0$

Sol. Sea $\varepsilon > 0$. Recordemos que el coseno está acotado por 1, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos x| \leq 1.$$

También sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x - 0| < \varepsilon$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ t. q. $0 < |x| < \delta$

$$\Rightarrow |x \cdot \cos x - 0| = |x \cdot \cos x| = |x| \cdot |\cos x| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos x = 0 \quad \blacksquare$$

Ejercicio 12. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \ (x > K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $K' > 0$ t. q. si $x > K'$ entonces

$$|x| \text{ es } \text{corta} \rightarrow |x| |f(x) - L| \leq |x f(x) - L| < 2$$

$\uparrow$
 Despejar $|f(x)| \dots$

$\nwarrow$ ¿Por qué?

Ejercicio 8. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = bL$.

Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow | \frac{f(bx)}{x} - bL | < \varepsilon)$

Por hip. existe $\delta_1 > 0$ t. q. si $0 < |x| < \delta_1 \Rightarrow | \frac{f(x)}{x} - L | < \varepsilon'$.

¿Qué pasa si $0 < |bx| < \delta_1$?

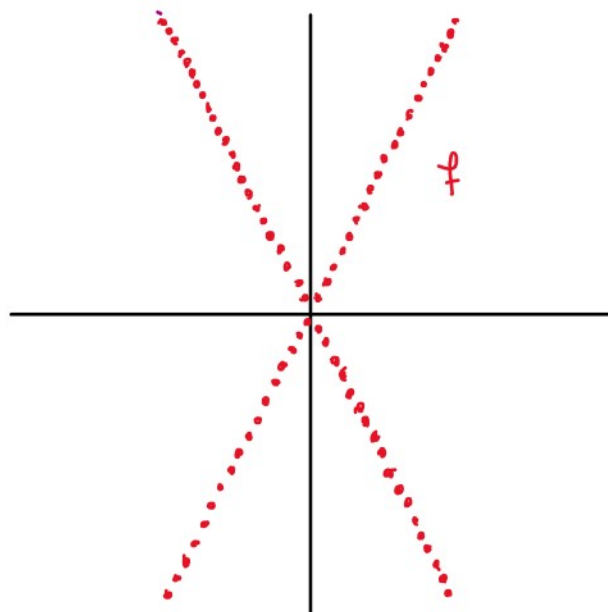
$$\Rightarrow \left| \frac{f(bx)}{bx} - L \right| < \varepsilon'$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 sobra falta b

Ejercicio 7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para alguna $a \in \mathbb{R}$?



Sol. Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y definimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Sea $x \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < |x - 0| < \delta$

$$\text{Si } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - 0| = |-2x| = |2x|$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - 0| = |2x|$$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| = |2x| = 2|x| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Ahora supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$ si $a \neq 0$.

$$\Rightarrow \text{existe } \delta > 0 \text{ t.q. si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < |a|$$

Supongamos que $a > 0$

$$\Rightarrow \text{Por densidad de } \mathbb{Q} \text{ existe } x \in (a, a + \delta) \cap \mathbb{Q} \text{ y}$$

$$\text{por densidad de } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ existe } y \in (x, a + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$\text{Así } x > a > 0 \text{ con } x \in \mathbb{Q} \text{ y } y > a > 0 \text{ con } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$(1) \Rightarrow 2a < x + y < 2x + 2y = |2x + 2y| = |-2x - 2y| = |f(x) - f(y)|$$

$$\text{Además } 0 < |x - a| < \delta \text{ y } 0 < |y - a| < \delta$$

$$(2) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - L + (L - f(y))|$$

$$\leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < |a| + |a| = 2a \quad a > 0$$

$$\Rightarrow \overset{(1)}{2a} < |f(x) - f(y)| < \overset{(2)}{2a}$$

$$\Rightarrow 2a < 2a \quad \nabla$$

Pasa lo mismo si $a < 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ no existe si } a \neq 0$$

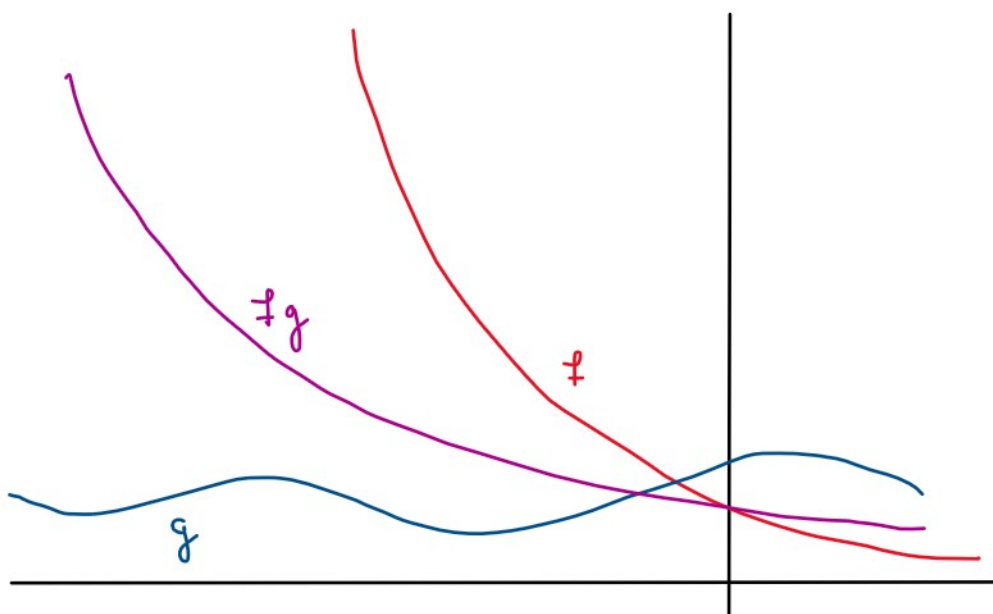
Ejercicio 20 (b) Sea f tal que $|f(x)| < |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

¿Cuánto vale $f(0)$?

P.D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

Ejercicio. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Prueba que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = \infty$ si $c > 0$.



S.I. P.D. $\forall K > 0 \exists M < 0 \forall x (x < M \Rightarrow f(x)g(x) > K)$

Sea $K > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, existe $M_1 < 0$ t.q. si $x < M_1$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{2K}{c} > 0 \quad (c > 0)$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = c$, existe $M_2 < 0$ t.q. si $x < M_2$

$$\Rightarrow |g(x) - c| < \frac{c}{2} \quad (c > 0)$$

$$\Rightarrow c - g(x) \leq |g(x) - c| < \frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{c}{2} < g(x)$$

Definimos $M = \min\{M_1, M_2\} < 0$ y sea $x < M$

$$\Rightarrow x < M \leq M_1 \quad \text{y} \quad x < M \leq M_2$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{2K}{c} > 0 \quad \text{y} \quad g(x) > \frac{c}{2} > 0$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) > \left(\frac{2K}{c}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = K \quad \forall x < M$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = \infty \quad \square$$