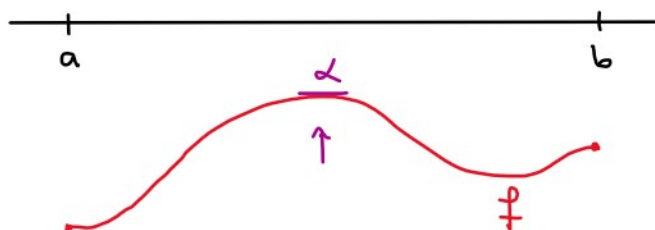


Ejercicios con funciones continuas

jueves, 16 de diciembre de 2021

Ejercicio. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Demuestra que existe $\alpha < 0$ tal que $f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in [a, b]$.



Sol. Como f es continua en $[a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que
$$f(x) \leq f(y) \quad \forall x \in [a, b],$$

es decir, f alcanza su máximo en y .

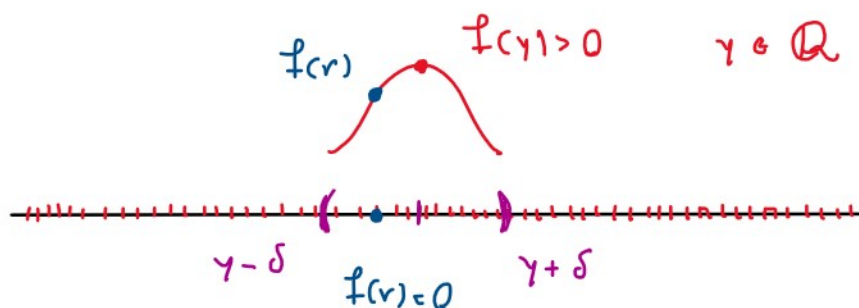
Por hipótesis, $f(y) < 0$

Definimos $\alpha = f(y)$

$$\Rightarrow \alpha < 0 \quad \gamma \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq \alpha \quad \blacksquare$$

Ejercicio. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ t.q. $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

¿Qué se puede decir de la función f ?



Sol. Afirmación: $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Supongamos por contradicción que existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ t.q. $f(\gamma) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(\gamma) > 0$

Como f es continua en γ , existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \quad f(x) > 0 \quad (*)$$

Por densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe $z \in (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

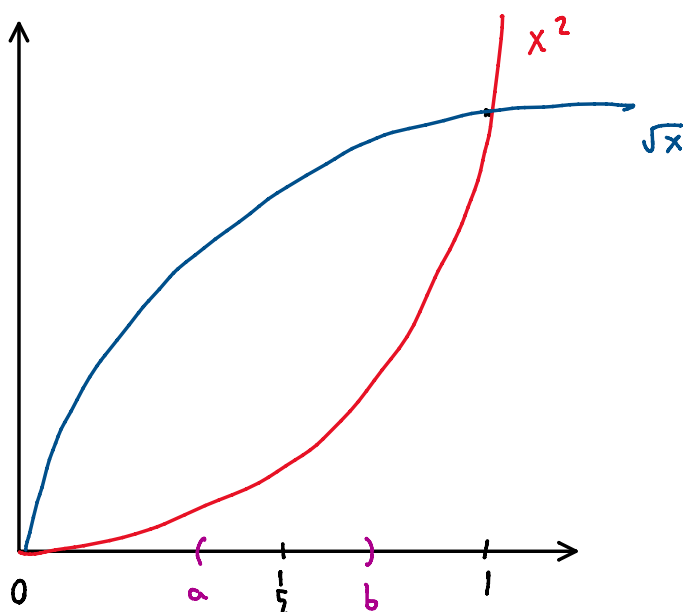
$$\text{Ya que } z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \xRightarrow{\text{w.p.}} f(z) = 0$$

$$\text{pero } z \in (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \Rightarrow f(z) > 0 \quad \text{!}$$

$$\therefore f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio. Demuestra que existen $0 < a < b$ tales que

$$\forall x \in (a, b) \quad \sqrt{x} > x^2$$



Sol. Definimos $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \sqrt{x} - x^2$,

y notemos que f es una función continua por ser la resta de

y notemos que f es una función continua por ser la resta de las funciones continuas $\sqrt{x}$ y x^2

$$\begin{aligned}\text{Luego, } f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sabemos que } \sqrt{2} > 1 &\Rightarrow 2\sqrt{2} - 1 > 0 \\ &\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} > 0\end{aligned}$$

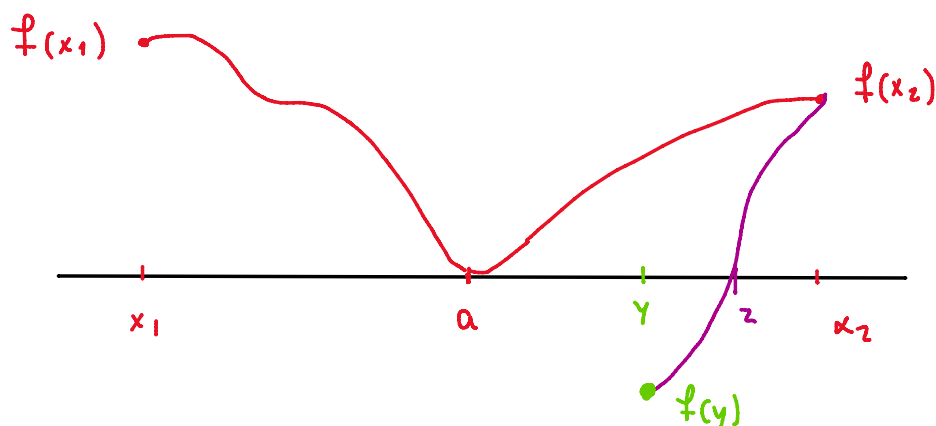
Por un Lema visto en clase sabemos que existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ t.q.

$$\begin{aligned}\forall x \in \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right) & \quad f(x) > 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right) & \quad \sqrt{x} - x^2 > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } a = \frac{1}{2} - \delta > 0 \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2} + \delta & \Rightarrow 0 < a < b \\ \text{y } \forall x \in (a, b) & \quad \sqrt{x} > x^2 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio. Sea f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ solamente en $x = a$, $f(x_1) > 0$ con $x_1 < a$ y $f(x_2) > 0$ con $x_2 > a$.

Determina el signo de $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.



Sol. Afirmamos que $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Supongamos por contradicción que existe $y \in \mathbb{R}$ t. q. $f(y) < 0$

Podemos suponer que $a < y < x_2$.

Como $f(y) < 0 < f(x_2)$ y f es continua en $[y, x_2]$,

se sigue de un teorema fuerte de continuidad que existe

$z \in (y, x_2)$ t. q. $f(z) = 0$

Para $a < y < z \rightarrow a \neq z$ y $f(a) = 0 = f(z)$!

Los casos $y < x_1$, $x_1 < y < a$ y $x_2 < y$ son análogos

$\therefore f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio. Muestra que las siguientes ecuaciones tienen una solución:

1) $x^3 + 7x^2 - 3x - 5 = 0$;

2) $\sin x = x + 1$;

3) $x^{67} = \frac{\cos^2(x)}{1 + x^2 + \cos^4(x)}$.

Sol. 1) Sea $f(x) = x^3 + 7x^2 - 3x - 5$, que es una función continua por ser un polinomio

$$\sim f(0) = 0^3 + 7 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$$

$$\sim f(2) = 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 5 = 8 + 28 - 6 - 5 = 30 > 0$$

$$\Rightarrow f(0) < 0 < f(2)$$

Ya que f es continua, se sigue del T.V.I. que existe

$$y \in (0, 2) \text{ t. q. } f(y) = 0$$

$\Rightarrow \gamma$ es solución de la ecuación.

2) $\sin x = x + 1$

Sea $g(x) = \sin x - x - 1$, que es una función continua.

$$\sim g(\pi) = \sin \pi - \pi - 1 = -\pi - 1 < 0$$

$$\sin(\pi) = 0$$

$$\sim g(-\pi) = \sin(-\pi) - (-\pi) - 1 = \pi - 1 > 0$$

$$\sin(-\pi) = 0$$

Ya que $g(-\pi) > 0 > g(\pi)$ y g es continua, por T.V.I. existe $\gamma \in (-\pi, \pi)$ t.q.

$$g(\gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\gamma) = \gamma + 1$$

$\therefore \gamma$ es solución de la ecuación.

3) Sea $h(x) = x^{67} - \frac{\cos^2(x)}{1+x^2+\cos^4(x)}$ que es continua

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sim h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{67} - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{67} > 0$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sim h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{67} - \frac{\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2+\cos^4\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{67} < 0$$

$\rightarrow$ exponente impar

Ya que h es continua y $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, se sigue del

T.V.I. que existe $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que

$$h(\gamma) = 0$$

$\therefore \gamma$ es solución de la ecuación.

Ejercicio. Sea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(1)$.

Demuestra que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$

Sol. Definimos $g: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$$

Ya que $x + \frac{1}{2}$ es continua en $[0, \frac{1}{2}]$, la composición $f(x + \frac{1}{2})$ también es continua

$\Rightarrow g$ es continua.

$$\sim g(0) = f(0) - f(0 + \frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2})$$

$$\sim g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0)$$
$$\Rightarrow g(\frac{1}{2}) = -g(0)$$

Caso 1. $g(0) = 0$

$$\Rightarrow f(0) - f(0 + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = f(0 + \frac{1}{2})$$

$$\text{Hacemos } c=0 \Rightarrow f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

Caso 2. $g(0) > 0$

$$\Rightarrow g(\frac{1}{2}) = -g(0) < 0$$

Como $g(0) > 0 > g(\frac{1}{2})$ y g es continua en $[0, \frac{1}{2}]$,

por T.V. I. existe $c \in (0, \frac{1}{2})$ t. q.

$$g(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) - f(c + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

Caso 3. $g(0) < 0 \dots \checkmark$

Caso 3. $g(0) < 0 \dots \checkmark$

$$\therefore \exists c \in [0, 4] \text{ t. q. } f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right) \quad \blacksquare$$