

Funciones uniformemente continuas

martes, 14 de diciembre de 2021

Teorema. Si n es impar, entonces la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

tiene al menos una raíz (solución) real.

Teorema. Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, entonces

f alcanza un valor mínimo, es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(y) \leq f(x)$$

Corolario. Si n es impar y $a_n \neq 0$, entonces la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

tiene al menos una raíz (solución) real.

Dem. Ejercicio.

Corolario. Sean $n \in \mathbb{N}$ un número par, $a_n \neq 0$ y

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

1) Si $a_n > 0$ entonces f alcanza un valor mínimo en $\mathbb{R}$, es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(y) \leq f(x)$

2) Si $a_n < 0$ entonces f alcanza un valor máximo en $\mathbb{R}$, es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(y)$

Dem 2) Como $a_n \neq 0$, consideremos

$$g(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \quad \left(g(x) = \frac{f(x)}{a_n} \right)$$

Ya que n es par, se sigue del teorema anterior que g alcanza un mínimo, es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ t. q

$$g(y) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow a_n \cdot g(y) \geq a_n g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a_n < 0)$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore y \in \mathbb{R}$ es un máximo de f en $\mathbb{R}$

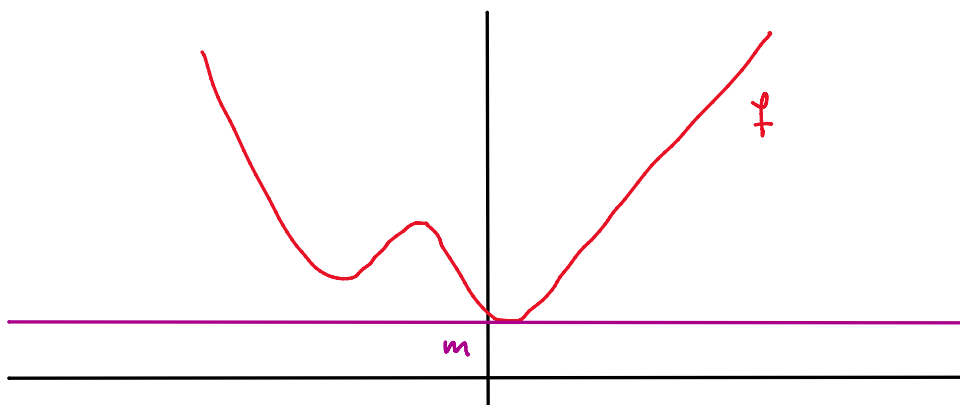
1) Ejercicio ■

Teorema. Consideremos la ecuación

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = c \quad (*)$$

y supongamos que n es par. Entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ admite una solución si $c \geq m$ y $(*)$ no tiene solución si $c < m$

Dem. Definimos $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. Como n es par, por un teorema anterior f alcanza un mínimo, es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(y) \leq f(x)$



Llamemos $m = f(y)$.

$$\begin{aligned}\text{Caso 1: } c < m &\Rightarrow c < f(y) \leq f(x) \\ &\Rightarrow c < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Esto es, ninguna $x \in \mathbb{R}$ satisface $(*)$

$$\begin{aligned}\text{Caso 2: } c = m &\Rightarrow f(y) = c \\ \therefore y &\text{ es solución de } (*)\end{aligned}$$

$$\text{Caso 3: } c > m \Rightarrow f(y) < c$$

$$\begin{aligned}\text{Ya que } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, &\text{ existe } b \in \mathbb{R} \text{ tal que } b > y \text{ y} \\ &c < f(b)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(y) < c < f(b)$$

Como f es continua (pues es un polinomio) se sigue del teorema del valor intermedio que existe $x \in (y, b)$ tal que

$$f(x) = c$$

$\therefore x$ es solución de $(*)$ ■

Continuidad uniforme

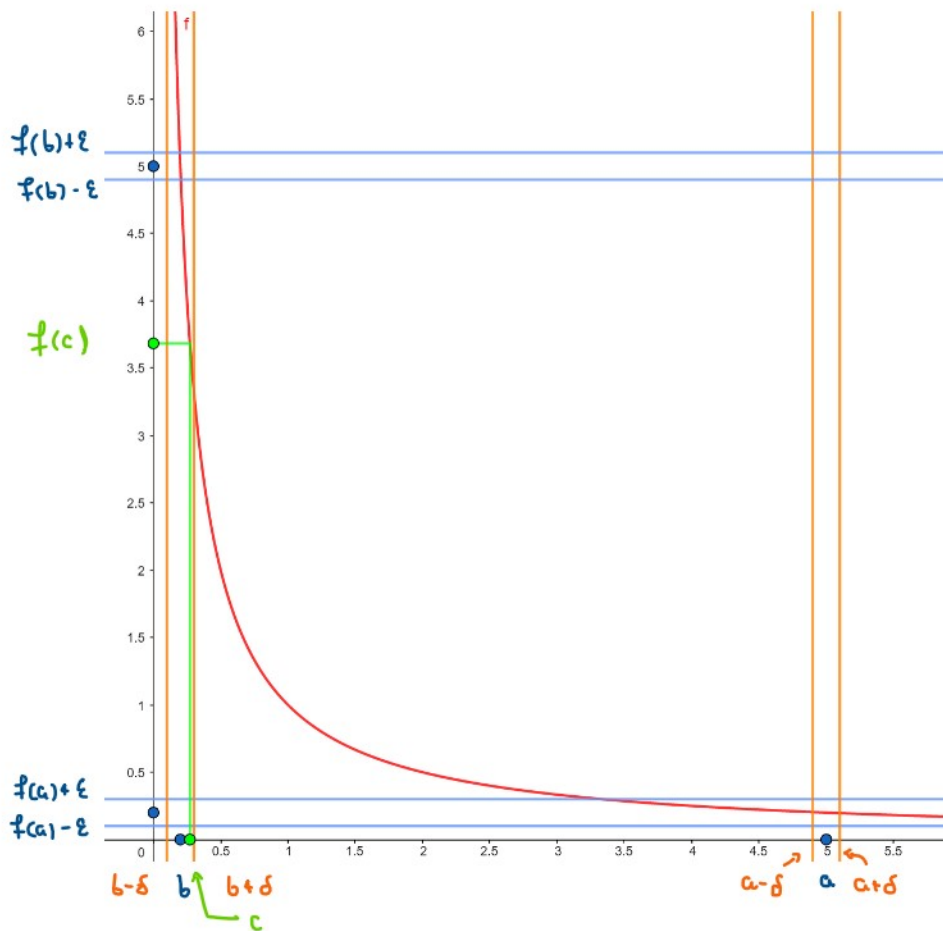
$$\text{Consideremos } f(x) = \frac{1}{x}$$

Ya sabemos que f es continua en $a \in (0, \infty)$, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_a > 0 \forall x \in (0, \infty) \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Notamos que δ_a depende de ε y a

$$\text{Si: } b \in (0, \infty) \text{ y } b \neq a \Rightarrow \delta_b \neq \delta_a$$



$$\text{Si } a=5 \quad \gamma \quad \varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$$|x - 5| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(5)| < \varepsilon$$

$$\text{Sea } b = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$\gamma \quad \delta \text{ la misma de } a$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, \infty) \text{ t. q.}$$

$$|c - \frac{1}{3}| < \delta \quad \gamma \quad |f(c) - f(\frac{1}{3})| > \varepsilon$$

Una $\delta > 0$ no sirve $\forall a \in (0, \infty)$ pues las distancias $|f(x) - f(a)|$ son cada vez más grandes cuando $a \rightarrow 0^+$

Es decir, f crece más rápido cuando $a \rightarrow 0^+$

Por otro lado, sea $g(x) = 2x$ que es continua en $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon)$$

$$\text{Pero } |g(x) - g(a)| = |2x - 2a| = 2|x - a|$$

$$\text{Si } \delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(a)| = 2|x - a| < 2\delta < \varepsilon$$

δ solo depende de ε pues g siempre tiene "el mismo crecimiento"

Definición. Decimos que $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **uniformemente continua** en A si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\hookrightarrow \delta$ solo depende de ε

Obs. f es uniformemente continua $\Rightarrow f$ es continua

$\nLeftarrow$

Ejemplo. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$

P.D. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in (0, \infty) (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Sean $\varepsilon = 1 > 0$ y $\delta > 0$ cualquiera

Por p. A. existe $n \in \mathbb{N}$ t. q. $\frac{1}{n} < \delta$

Luego $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in (0, \infty)$,

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta \quad \gamma$$

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = |n - (n+1)| = 1 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| < \delta \quad \gamma \quad \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| \geq \varepsilon$$

$\therefore f$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$.

Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Dem. Supongamos por contradicción que f no es unif. continua en $[a, b]$, es decir, $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b] (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

$\Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in [a, b]$ t. q.

$\Rightarrow$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in [a, b]$ t. q.

$$(1) \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (2)$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ es una sucesión acotada, por el Teorema Bolzano-Weierstrass existe una subsección $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\underline{x_{n_k} \rightarrow x_0} \quad \text{con } x_0 \in [a, b]$$

Además $(y_{n_k} - x_{n_k}) \rightarrow 0$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sea } \varepsilon' > 0 \text{ y } K \in \mathbb{N} \text{ t. q. } \frac{1}{n_k} < \varepsilon \\ \text{Si } k > K \\ \Rightarrow \quad |y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n_K} < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} [x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k})] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} (y_{n_k} - x_{n_k}) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{y_{n_k} \rightarrow x_0} \quad \text{con } (y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$$

Pero f es continua en $[a, b]$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0$$

$\Rightarrow$ existe $K \in \mathbb{N}$ t. q.

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0 \quad \forall k > K$$

Pero por (2)

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k > K \quad \text{!}$$

$\therefore f$ es uniformemente continua ■

Ejercicio. Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Sol. Sea $\varepsilon > 0$.

Como f es unif. continua en A , existe $\delta > 0$ t. q. si

$$x, y \in A \quad \text{y} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (\diamond)$$

Pero $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ es de Cauchy, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$

$$\text{tal que si } m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \delta$$

$$\stackrel{(\diamond)}{\Rightarrow} |f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

$\therefore (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy ■