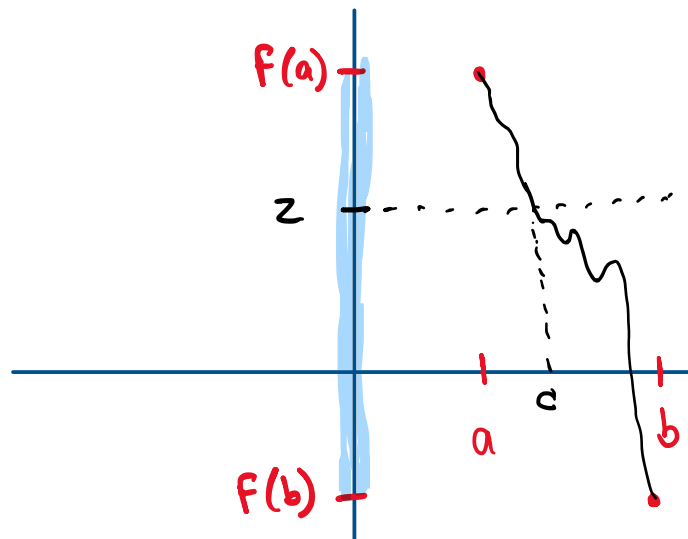
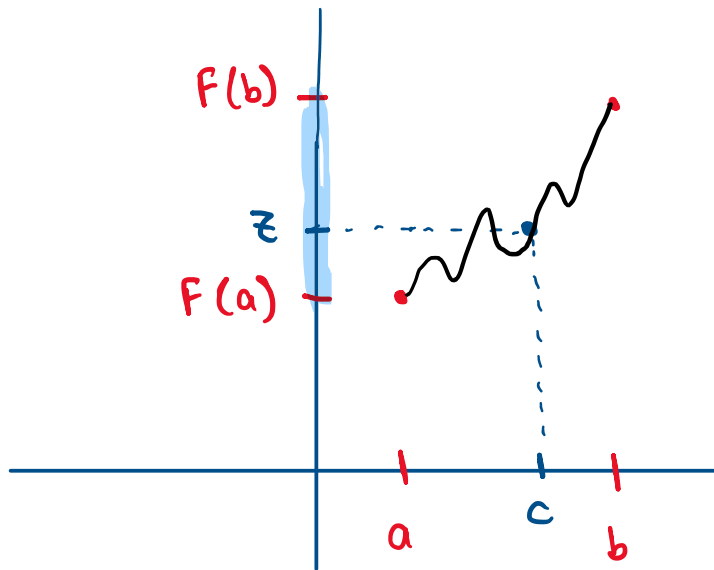


Teorema del valor intermedio (T.V.I.)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces para cualquier número z entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.



Teorema ③ Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq f(c)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor máximo" en dicho intervalo).

Corolario 4 Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad f(c) \leq f(x)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor mínimo" en dicho intervalo).

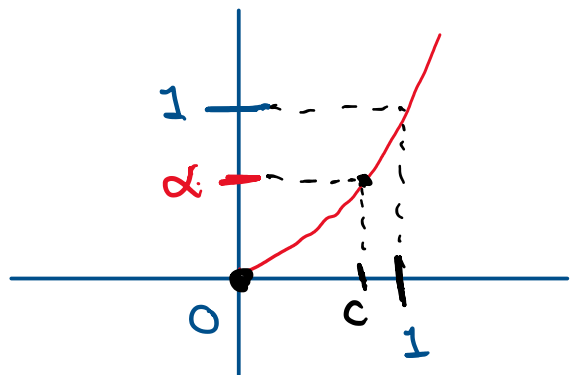
Teorema. Todo número real mayor o igual a cero tiene raíz cuadrada, es decir, si $\alpha \geq 0$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^2 = \alpha$.

Demostración

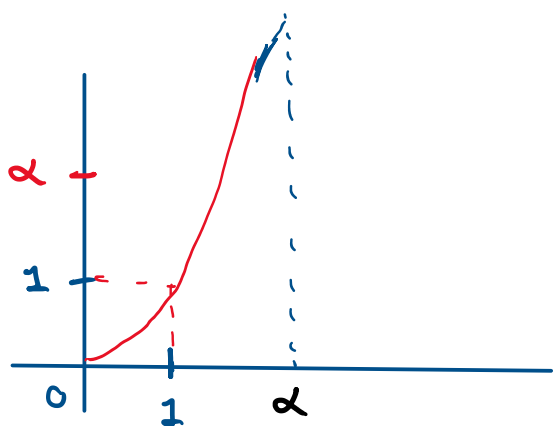
- Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, podemos tomar $c = 0$ o $c = 1$, respectivamente.
- Sea $\alpha > 0$ tal que $\alpha \neq 1$.

Sea $f(x) = x^2 \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

- Si $0 < \alpha < 1$, como $f(0) = 0 < \alpha < 1 = f(1)$, por el T.V.I. aplicado al intervalo $[0, 1]$, existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = \alpha \Rightarrow c^2 = \alpha$.



- Si $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^2 > \alpha \Rightarrow \underline{f(1) = 1} < \underline{\alpha} < \underline{\alpha^2 = f(\alpha)}$



Por el T.V.I. aplicado al intervalo $[1, \alpha]$, existe $c \in [1, \alpha]$ tal que $f(c) = \alpha \Rightarrow c^2 = \alpha$.

Teorema. Sea $n \in \mathbb{N}$.

- i) Si n es par, entonces todo número real mayor o igual a cero tiene raíz n -ésima, es decir, si $\alpha \geq 0$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n = \alpha$.
 - ii) Si n es impar, entonces todo número real tiene raíz n -ésima, es decir, si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c^n = \alpha$.
- $x^n - \alpha = 0$

Demostración

i) Ejercicio

ii) Ejercicio (sugerencia: usar el siguiente teorema).

Teorema. Si n es impar, entonces la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

tiene al menos una raíz (solución) real.

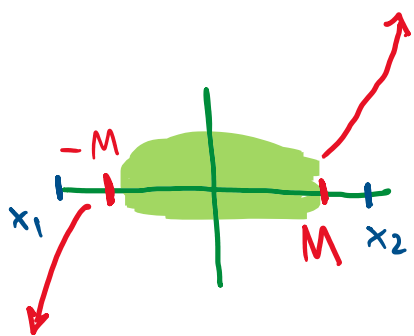
Demostración

Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
 $\Rightarrow F$ es continua en $\mathbb{R}$.

* Queremos hallar $c \in \mathbb{R}$ t.q. $F(c) = 0$ (en ese caso, $x=c$ será solución de la ecuación)
 Para esto, basta encontrar $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $\underline{F(x_1) < 0} < \underline{F(x_2)}$.

Notemos que

$$F(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \quad \text{si } x \neq 0$$



* Quiero que esto sea positiva para que el signo de $F(x)$ lo determine x^n

$$\frac{|a_{n-1}|}{|x|} < \frac{1}{2n} \rightarrow 2n|a_{n-1}| < |x|$$

$$\frac{|a_0|}{|x|^n} < \frac{1}{2n} \rightarrow 2n|a_0| < |x|^n$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$(*) \quad |x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_1|, 2n|a_0|$$

Notemos ahora que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\underline{|x|^k} \geq |x| > \underline{2n|a_{n-k}|} \Rightarrow \frac{1}{2n} > \frac{|a_{n-k}|}{|x|^k} \quad \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\}$$

↑
porque $|x| > 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \dots + \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|x|^n}$$

$$< \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ veces}} = n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \quad \text{siempre que}$$

$$(*) \quad |x| > 1, \quad 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|.$$

Consideremos ahora $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ que cumplan $(*)$

$$\Rightarrow x_1^n < 0 \quad (\text{porque } n \text{ es impar}) \quad \text{y} \quad x_2^n > 0$$

$\Rightarrow$

$$F(x_1) = \underbrace{x_1^n}_{-} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \dots + \frac{a_1}{x_1^{n-1}} + \frac{a_0}{x_1^n} \right) < 0$$

$$F(x_2) = \underbrace{x_2^n}_{+} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \dots + \frac{a_1}{x_2^{n-1}} + \frac{a_0}{x_2^n} \right) > 0$$

$$\Rightarrow F(x_1) < 0 < F(x_2)$$

Por el T.V.I. aplicado a $[x_1, x_2]$, existe $c \in [x_1, x_2]$ tal que

$$F(c) = 0 \Rightarrow c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$\therefore x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{tiene solución} \quad x = c.$$

Teorema

Si n es par y $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, entonces F alcanza un valor mínimo (en todo $\mathbb{R}$), es decir, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(y) \leq F(x).$$

Demostración.

Notemos nuevamente que

$$F(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

$$\text{Sea } M = \max\{1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_0|\}$$

Por la prueba anterior, sabemos que

$$\text{si } |x| > M \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > M$

$$\Rightarrow |x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \dots, 2n|a_1|, 2n|a_0|$$

Como $|x| > 1 \Rightarrow |x|^k \geq |x|$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Notemos ahora que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\underline{|x|^k} \geq |x| > \underline{2n|a_{n-k}|} \Rightarrow \frac{1}{2n} > \frac{|a_{n-k}|}{|x|^k} \quad \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| &\leq \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \dots + \frac{|a_1|}{|x|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|x|^n} \\ &< \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ sumandos}} = n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} < \frac{3}{2}$$

$$\text{si } |x| > M \Rightarrow 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} > \frac{1}{2}$$

Como n es par $\Rightarrow x^n > 0$ si $x \neq 0$

$$\Rightarrow F(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) > \frac{x^n}{2} \Rightarrow F(x) > \frac{x^n}{2} \text{ si } |x| > M$$

Sea $b > M$ tal que $\frac{b^n}{2} \geq F(0)$

(si $F(0) < 0$, sea $b = M+1$)

si $F(0) \geq 0$, sea $b = \max\{M+1, \sqrt[n]{2F(0)}\}$

• Si $x > b$, como $b > 0$

$\Rightarrow x^n > b^n$ y además $x > b > M$

$$\Rightarrow F(x) > \frac{x^n}{2} > \frac{b^n}{2} \geq F(0)$$

$\therefore F(x) > F(0)$ si $x > b$

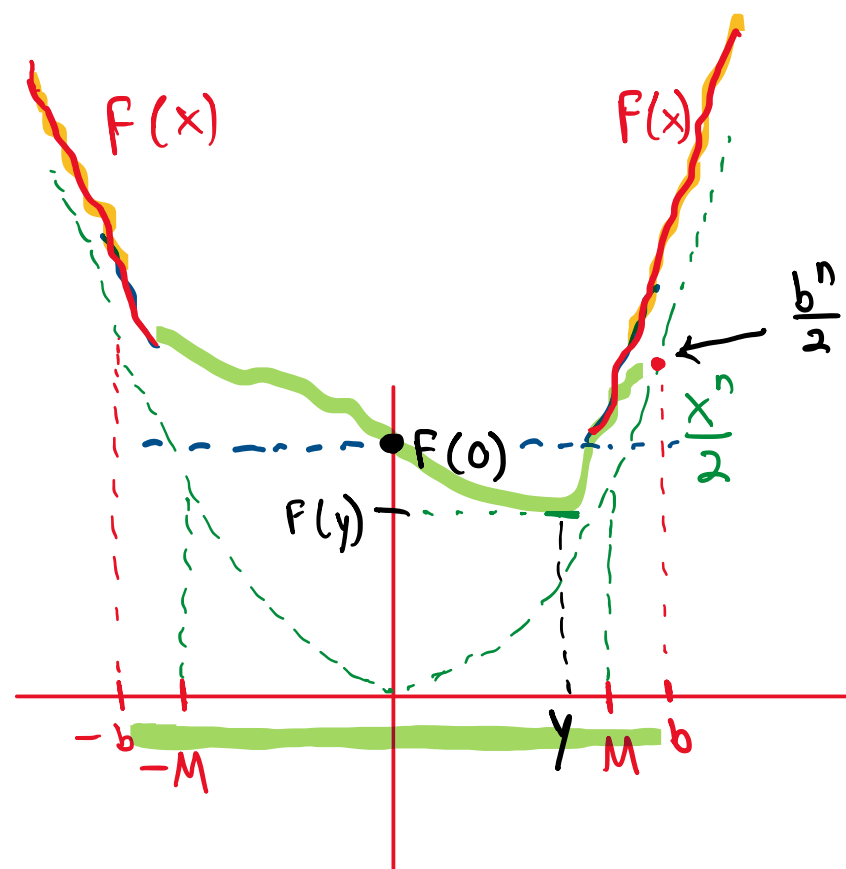
• Si $x < -b$, como $x < -b < 0$

$\Rightarrow x^n > (-b)^n = b^n$ (porque n es par)

y además $x < -b \Rightarrow |x| > b > M$

$$\Rightarrow F(x) > \frac{x^n}{2} > \frac{b^n}{2} \geq F(0)$$

$\therefore F(x) > F(0)$ si $x < -b$ o $x > b$ (**)



Como F es continua en $[-b, b]$ (por ser Función polinómica), existe $y \in [-M, M]$ tal que

$$\forall x \in [-b, b] \quad F(y) \leq F(x) \quad (\square)$$

Veamos que $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(y) \leq F(x)$.

Sea $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \in [-b, b] \Rightarrow F(y) \leq F(x)$
(□)

• Si $x \notin [-b, b] \Rightarrow x < -b$ o $x > b \Rightarrow F(y) \leq F(0) < F(x)$
(□) ← porque $0 \in [-b, b]$
(**)

$$\Rightarrow F(y) \leq F(x)$$

$$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \quad F(y) \leq F(x).$$