

Tres teoremas fuertes de continuidad

viernes, 10 de diciembre de 2021

Teorema. Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(x) \leq F(c)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor máximo" en dicho intervalo).

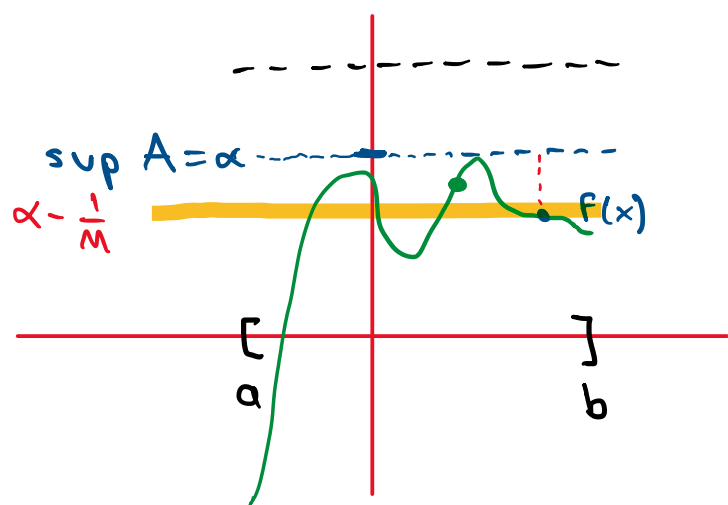
Demostración.

Por el teorema anterior sabemos que el conjunto

$$A = \{F(x) \mid x \in [a, b]\}$$

está acotado superiormente. Además, $A \neq \emptyset$ porque $F(a) \in A$.

Luego, A tiene supremo. Sea $\alpha = \sup A$



• Queremos probar que existe $c \in [a, b]$ tal que $F(c) = \alpha$.

Supongamos que esto no ocurre, es decir, $\forall x \in [a, b] \quad F(x) \neq \alpha$.

Definimos $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - F(x)} \quad \text{para cada } x \in [a, b].$$

Como $F(x) \neq \alpha \Rightarrow F(x) < \alpha$ (α es cota superior de A)

$$\Rightarrow \alpha - F(x) > 0 \quad \text{para cada } x \in [a, b]$$

Dado que F es continua, entonces g también es continua en $[a, b]$.

$\Rightarrow g$ está acotada superiormente en $[a, b]$ (Teorema anterior).

* g está acotada superiormente si $\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq M$
 g no está acotada superiormente si $\forall M > 0 \quad \exists x \in [a, b] \quad g(x) > M$.

Sea $M > 0$. Veremos que existe $x \in [a, b]$ t.q. $g(x) > M$

Como $\alpha - \frac{1}{M} < \alpha$ y $\alpha = \sup \{F(x) \mid x \in [a, b]\}$, entonces existe $x \in [a, b]$

$$\text{tal que } \alpha - \frac{1}{M} < F(x) \Rightarrow \alpha - F(x) < \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{\alpha - F(x)} = g(x)$$

$$\Rightarrow M < g(x) \Rightarrow g \text{ no está acotada superiormente en } [a, b]!$$

Por lo anterior, existe $c \in [a, b]$ t.q. $F(c) = \alpha$.

$$\therefore \forall x \in [a, b] \quad F(x) \leq F(c)$$

Idea

$$g(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha - F(x)} > M \Leftrightarrow \frac{1}{M} > \alpha - F(x) \Leftrightarrow F(x) > \alpha - \frac{1}{M}$$

Teorema. ① Si F es continua en $[a, b]$ y $F(a) < 0 < F(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $F(c) = 0$.

Teorema. ② Si F es continua en $[a, b]$, entonces F está acotada superiormente en $[a, b]$.

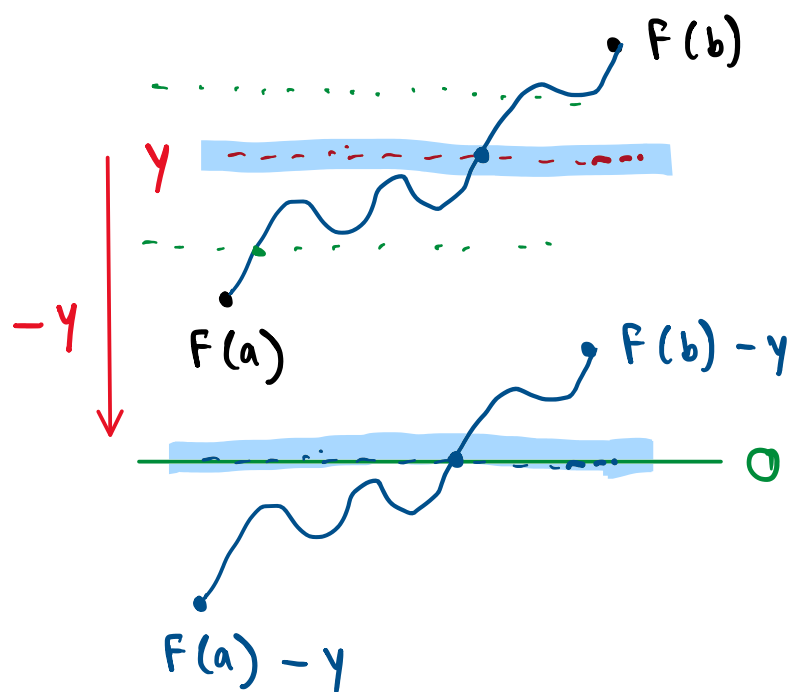
Teorema. ③ Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(x) \leq F(c)$.

Corolario 1. Si F es continua en $[a, b]$ y $F(a) < y < F(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $F(c) = y$.

$$F(a) - y < 0 < F(b) - y$$

Demostración.

Definimos $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = F(x) - y \Rightarrow g$ es continua en $[a, b]$ y $g(a) = F(a) - y < 0 < F(b) - y = g(b)$. Por el Teorema ①, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow F(c) - y = 0 \Rightarrow F(c) = y$.

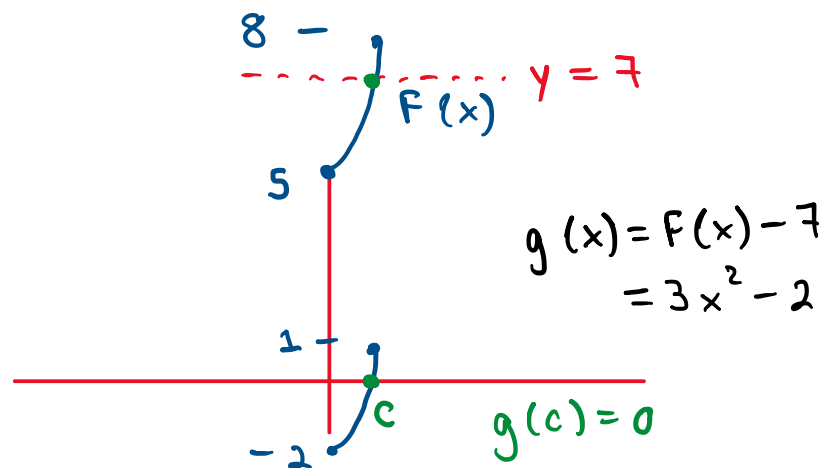


$$F(x) = 3x^2 + 5, \quad x \in [0, 1]$$

$$F(0) = 5$$

$$F(1) = 8$$

$$F(0) < y < F(1)$$



Corolario 2. Si F es continua en $[a, b]$ y $F(a) > y > F(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $F(c) = y$.

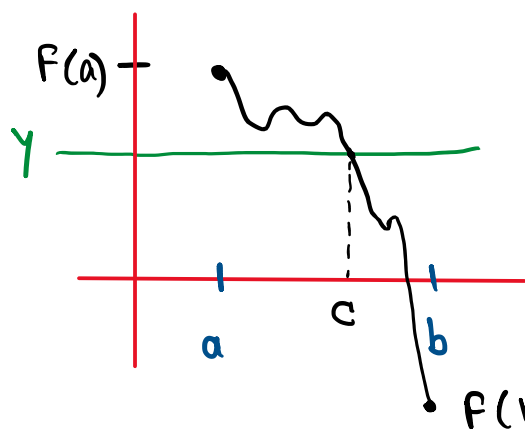
Demostración. Definimos $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = -F(x) \text{ para cada } x \in [a, b]$$

$\Rightarrow g$ es continua en $[a, b]$.

$$\text{Como } F(a) > y > F(b) \Rightarrow -F(a) < -y < -F(b)$$

$$\Rightarrow g(a) < -y < g(b).$$

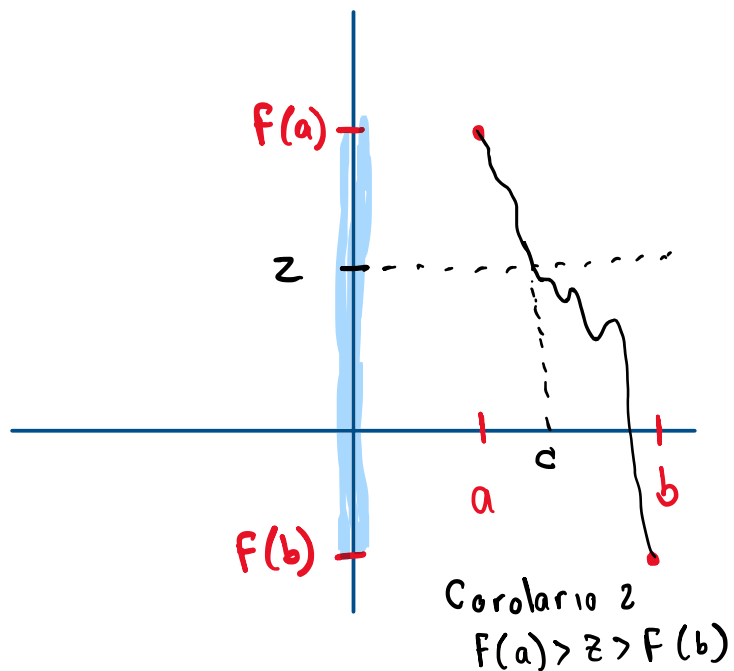
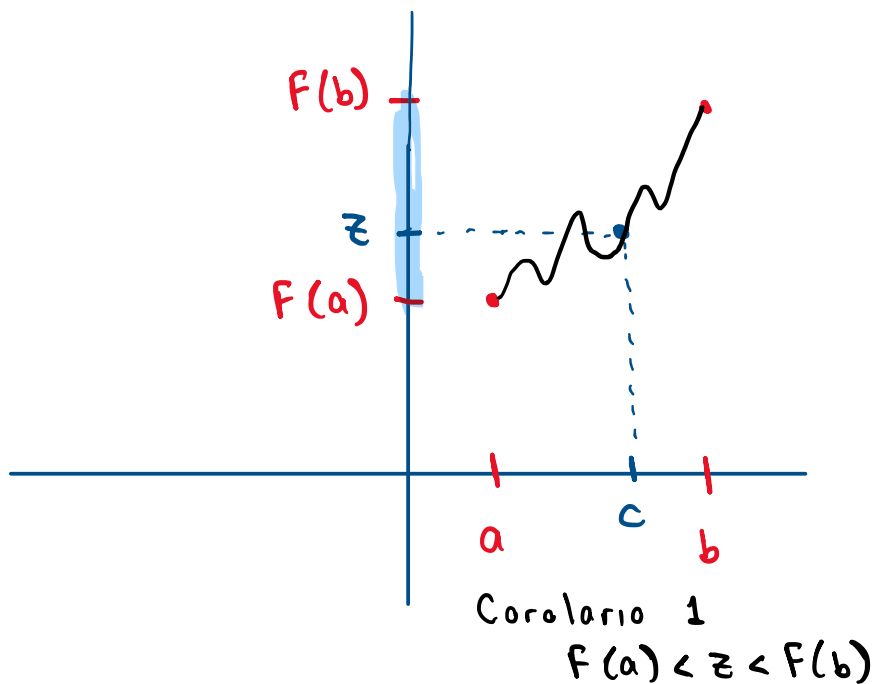


Por el Corolario 1, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = -y \Rightarrow -F(c) = -y \Rightarrow F(c) = y$.

Como consecuencia de los corolarios 1 y 2, tenemos el siguiente resultado:

Teorema del valor intermedio (T.V.I.)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces para cualquier número z entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.



Ejemplo:

Demostrar que la ecuación $\sin x = x + 1$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \sin x - x - 1$.

$\Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$ (por ser suma de una función trigonométrica y una polinómica).

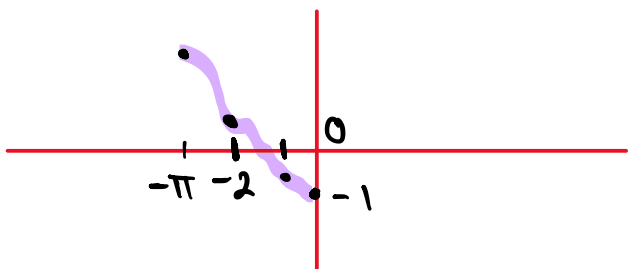
$$\text{Notemos que } f(0) = \sin(0) - 0 - 1 = 0 - 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(-\pi) = \sin(-\pi) + \pi - 1 = 0 + \pi - 1 > 0$$

Como f es continua en $[-\pi, 0]$ y $f(0) < 0 < f(-\pi)$, por el T.V.I. existe $c \in [-\pi, 0]$ t.q. $f(c) = 0$

$$\Rightarrow \sin(c) - c - 1 = 0 \Rightarrow \sin(c) = c + 1$$

$\therefore x = c$ es solución de la ecuación



Teorema 2 Si F es continua en $[a, b]$, entonces F está acotada superiormente en $[a, b]$.

Corolario 3 Si F es continua en $[a, b]$, entonces F está acotada inferiormente en $[a, b]$.

Demostración

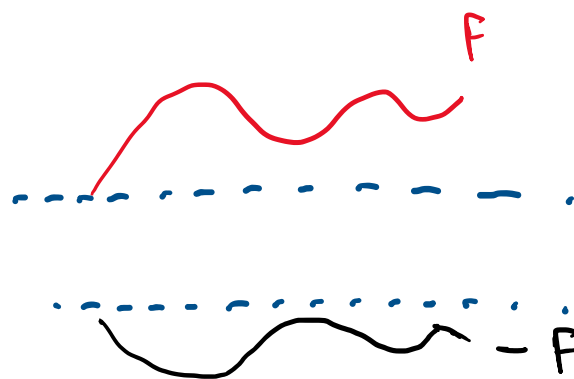
Definimos $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = -F(x) \Rightarrow g$ es continua en $[a, b]$

Por el Teorema 2, g está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq M$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad -g(x) \geq -M$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \quad F(x) \geq -M$$

$\therefore F$ está acotada inferiormente en $[a, b]$
(por $-M$).



Como consecuencia del Teorema 2 y el Corolario 3, tenemos el siguiente

Teorema 3 Si F es continua en $[a, b]$, entonces F está acotada en $[a, b]$.

Teorema 4 Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(x) \leq F(c)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor máximo" en dicho intervalo).

Corolario 4 Si F es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad F(c) \leq F(x)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor mínimo" en dicho intervalo).

Demostración (Ejercicio)

Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ t.q.
 $\forall x \in [a, b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Demostración:

(Ejercicio)

