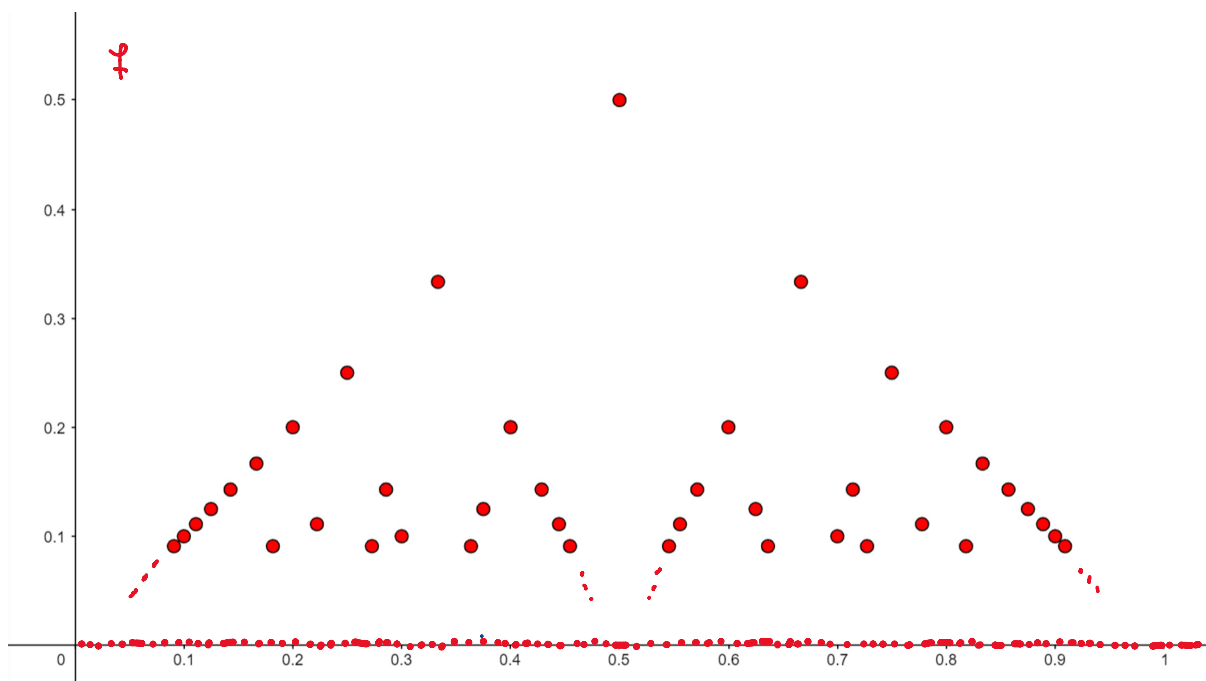


Ejemplos de funciones continuas y discontinuas

jueves, 9 de diciembre de 2021

Ejemplo. Definimos la función de Thomae $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ y } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



- Veamos que f no es continua en $\mathbb{Q} \cap (0,1)$

Sea $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Por densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\text{t. q. } a < a_1 < 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \in (0,1)$$

Similarmente por densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe $a_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\text{t. q. } a < a_2 < \min\{a_1, a + \frac{1}{2}\} \quad \Rightarrow \quad a_2 \in (0,1)$$

Inductivamente p. c. $n \in \mathbb{N}$ existe $a_{n+1} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$ t. q.

$$a < a_{n+1} < \min\{a_n, a + \frac{1}{n+1}\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1) \text{ y } \underline{a_n > a} \text{ p. c. } n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

$$\text{Sean } \varepsilon > 0 \text{ y } N \in \mathbb{N} \text{ t. q. } \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Si $n \geq N$

$$\Rightarrow |a - a_n| \stackrel{(2)}{=} a_n - a \stackrel{(1)}{<} (a + \frac{1}{n}) - a < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Por construcción $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(a_n) = 0$ p.c. $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Pero $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \Rightarrow a = \frac{p}{q}$ con $q \in \mathbb{N} \Rightarrow f(a) = \frac{1}{q} \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \gamma \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(a)$$

$\therefore f$ no es continua en $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$

criterio de
continuidad
por sucesiones

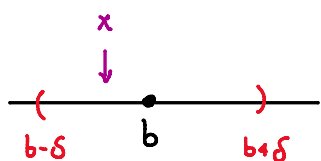
• Ahora veremos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sean $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$

$$P.D. \exists \delta > 0 \forall x \in (0,1) \quad (0 < |b - x| < \delta \Rightarrow |f(b) - f(x)| < \varepsilon)$$

Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ t. q. $N-1 < \varepsilon < N$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$$



$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(b) - f(x)| = 0 < \varepsilon \quad \checkmark$$

$$\text{Si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad q \geq N \Rightarrow |f(b) - f(x)| = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \checkmark$$

$$\text{Si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad q < N \Rightarrow |f(b) - f(x)| = \frac{1}{q} \stackrel{?}{\geq} \frac{1}{N-1} \geq \varepsilon$$

Sea $n \in \{2, \dots, N-1\}$. Notemos que existe una cantidad finita de puntos $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ tales que $f(x) = \frac{1}{n}$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right)$$

Definimos $D = \{ x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \mid f(x) = \frac{1}{n}, \quad n = 2, \dots, N-1 \}$

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{N-1}, \dots, \frac{N-2}{N-1} \right\}$$

$\Rightarrow D$ es un conjunto finito.

$$\text{Sea } \delta = \min \{ |b-x| \mid x \in D \}$$

Pasa que $b \neq x$ p. c. $x \in D$ pues $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow |b-x| > 0 \text{ p. c. } x \in D$$

$$\Rightarrow \delta > 0$$

Sea $x \in (0,1)$ tal que $0 < |b-x| < \delta$

$$\sim \text{Si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |\cancel{f(b)}^0 - \cancel{f(x)}^0| = 0 < \varepsilon \quad \checkmark$$

$$\sim \text{Si } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible, } p, q \in \mathbb{N}$$

Afirmamos que $q \geq N$

$$\text{Si } q < N \Rightarrow x \in D$$

$$\Rightarrow |b-x| < \delta = \min \{ |b-y| \mid y \in D \} \leq |b-x|$$

$$\Rightarrow |b-x| < |b-x| \quad \text{!}$$

$$\Rightarrow q \geq N$$

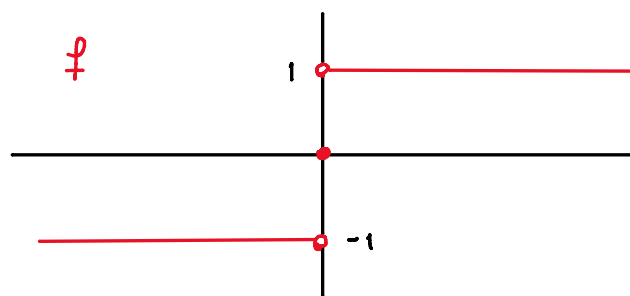
$$\Rightarrow |\cancel{f(b)}^0 - f(x)| = | - f(\frac{p}{q}) | = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \checkmark$$

$$\text{Esto es, } \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$$

$$\therefore f \text{ es continua en } b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,1)$$

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



¿Es f continua en $x=0$?

~ Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

~ Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

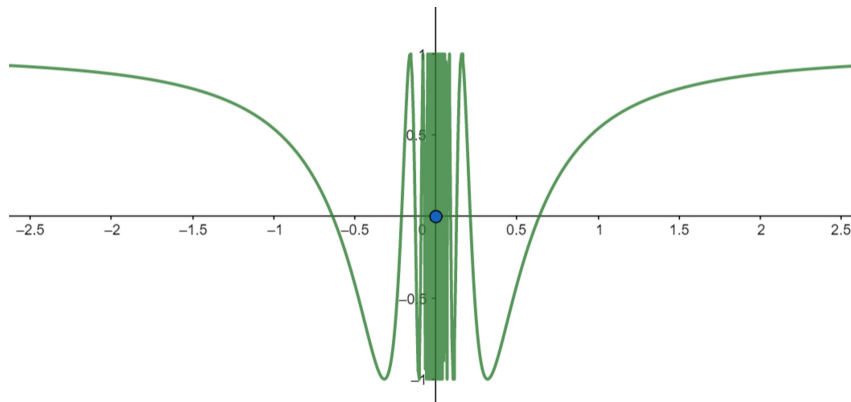
Como los límites laterales no coinciden, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe

$\therefore f$ no es continua en $x=0$.

Ejemplo. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es f continua en $x=0$? **No**



P.D. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (0 < |0 - x| < \delta \text{ y } |\cancel{f(0)} - f(x)| = |\cos(\frac{1}{x})| > \varepsilon)$

Sean $0 < \varepsilon < 1$ y $\delta > 0$ cualquiera.

Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta} < N < 2\pi N$

Notamos que

$$|0 - \frac{1}{2\pi N}| = \frac{1}{2\pi N} > 0 \quad \text{y} \quad |0 - \frac{1}{2\pi N}| = \frac{1}{2\pi N} < \delta$$

$$\Rightarrow 0 < |0 - \frac{1}{2\pi N}| < \delta$$

Además

coseno tiene periodo 2π

$$|\cancel{f(0)} - f(\frac{1}{2\pi N})| = \left| -\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi N}}\right) \right| = |\cos(2\pi N)| = |\cos(2\pi)| = 1$$

$$\Rightarrow 0 < |0 - \frac{1}{2\pi N}| < \delta \quad \text{y} \quad |\cancel{f(0)} - f(\frac{1}{2\pi N})| > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

$\therefore f$ no es continua en $x=0$.

Ejemplo. Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

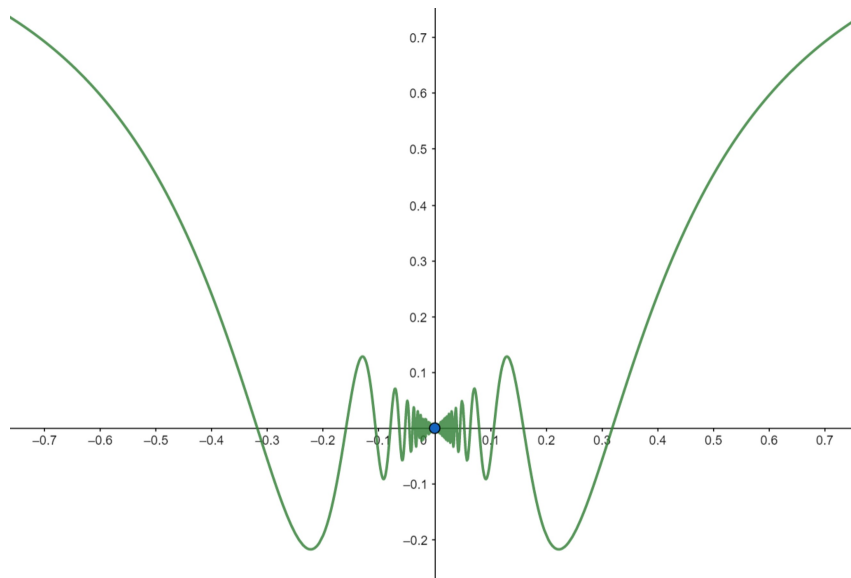
¿Es f continua en $x=0$?

Notamos que $f(0) = 0$, y ya hemos probado que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$\therefore f$ es continua en $x=0$.



Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2} + 2 & \text{si } x > 1 \\ x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

¿Es f continua en $x=1$?

~ Si $x > 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2} + 2 = |x| + 2 = x + 2$ x > 0

Sabemos que la función polinómica $p(x) = x + 2$ es continua en $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = (1) + 2 = 3 = f(1)$$

~ Si $x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x - 1$

Sabemos que $g(x) = x^2 + 3x - 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x - 1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 3 = f(1)$$

Ya que los límites laterales existen y coinciden en $f(1)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$\therefore f$ es continua en $x=1$.

