

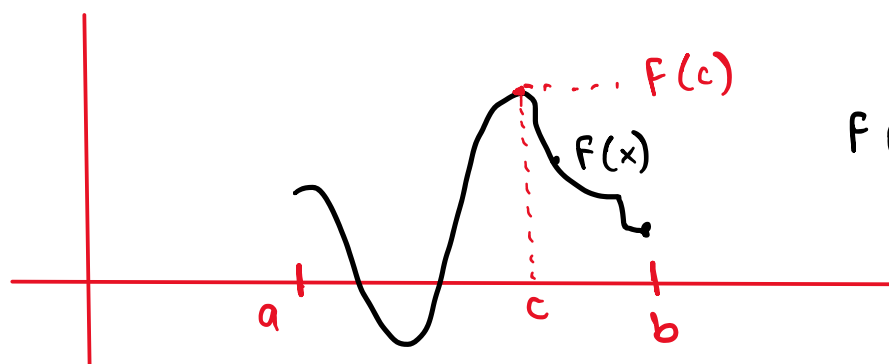
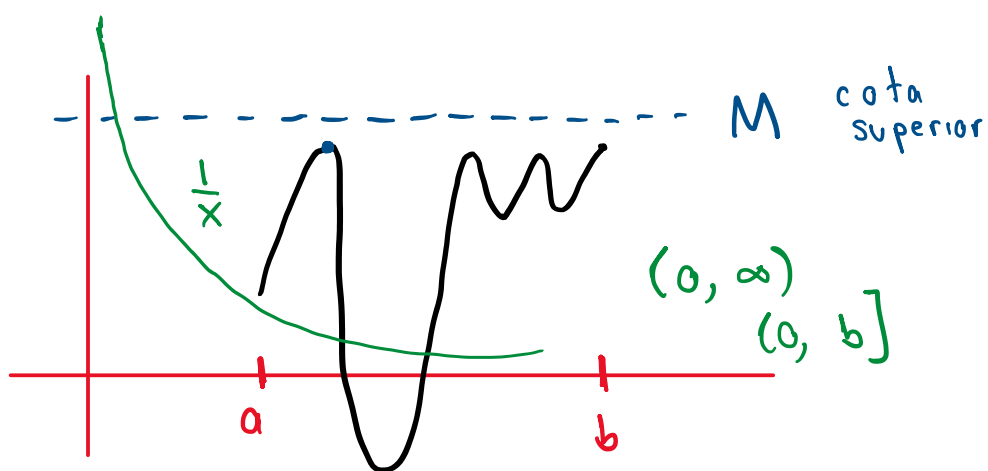
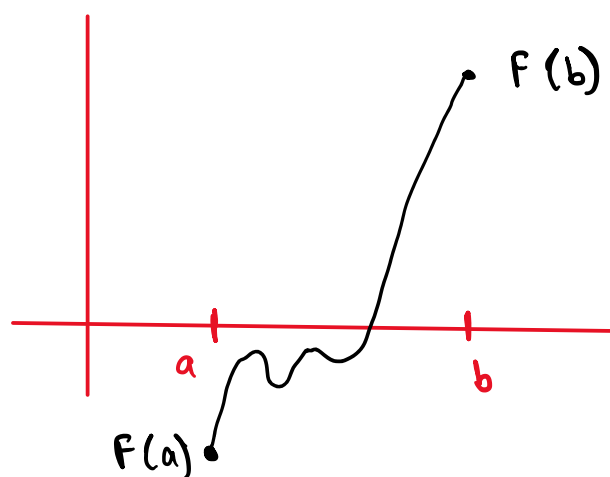
Tres teoremas fuertes de continuidad

miércoles, 8 de diciembre de 2021

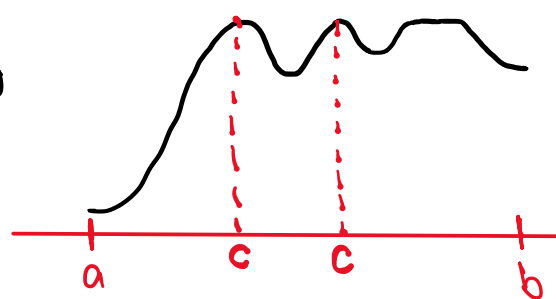
Teorema. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$.

Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq f(c)$. (Toda Función continua en un intervalo cerrado "alcanza su valor máximo" en dicho intervalo).



$$f(x) \leq f(c)$$



* Recordatorio sobre supremos

Axioma del supremo:

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

① Lema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente.

Si $\alpha = \sup A$, entonces para todo $\delta > 0$ existe $a \in A$ tal que $\alpha - \delta < a \leq \alpha$.

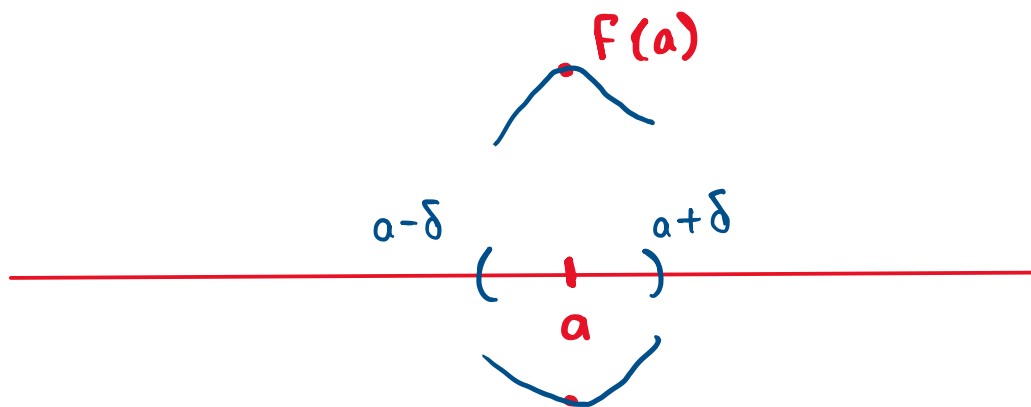
Dem. Como $\delta > 0 \Rightarrow \alpha - \delta < \alpha \Rightarrow \alpha - \delta$ no es cota superior de A
 $\Rightarrow$ existe $a \in A$ tal que $\alpha - \delta < a$.

Además, α es cota superior de $A \Rightarrow a \leq \alpha \Rightarrow \alpha - \delta < a \leq \alpha$

$$* \underline{|x - a| < \delta} \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow \underline{x \in (a - \delta, a + \delta)}$$

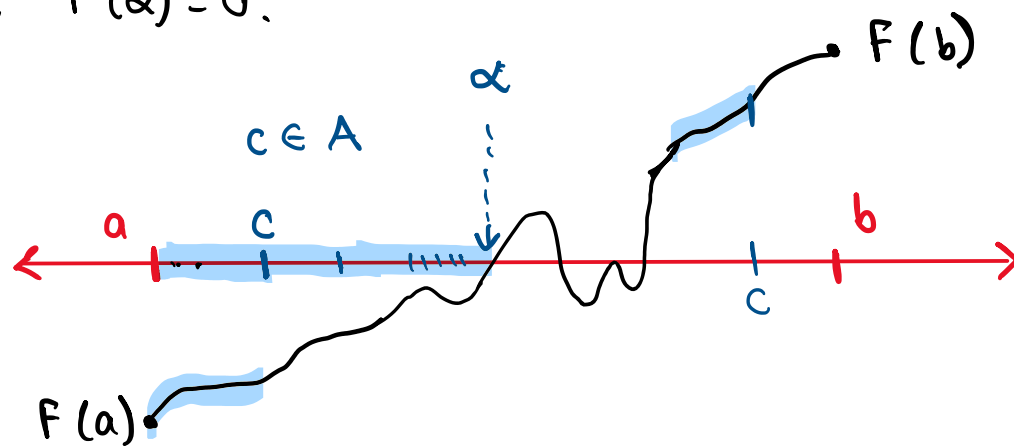
(2) Lema

- 1) Si F es continua en a y $F(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que
 $\forall x \in D_F \cap (a - \delta, a + \delta) \quad F(x) > 0$.
- 2) Si F es continua en a y $F(a) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que
 $\forall x \in D_F \cap (a - \delta, a + \delta) \quad F(x) < 0$.



Teorema. Si F es continua en $[a, b]$ y $F(a) < 0 < F(b)$, entonces existe $\alpha \in [a, b]$ tal que $F(\alpha) = 0$.

Demostración



Sea $A = \{c \in [a, b] \mid \forall x \in [a, c] \quad F(x) < 0\}$

- Notemos que $a \in A$ porque $\forall x \in [a, a] = \{a\} \quad F(x) < 0$ (por hipótesis, $F(a) < 0$)
 $\Rightarrow A \neq \emptyset$.

- Por otro lado, como $A \subseteq [a, b] \Rightarrow b$ es cota superior de A
 $\Rightarrow A$ está acotado superiormente.

$\therefore A$ tiene supremo. Sea $\alpha = \sup A$.

Como b es cota superior de $A \Rightarrow \alpha \leq b$ (α es la mínima cota superior de A).

Por otro lado, como $a \in A$ y α es cota superior de $A \Rightarrow a \leq \alpha$

$$\therefore \alpha \in [a, b]$$

Demostraremos que $F(\alpha) = 0$ descartando los casos de $F(\alpha) < 0$ y $F(\alpha) > 0$.

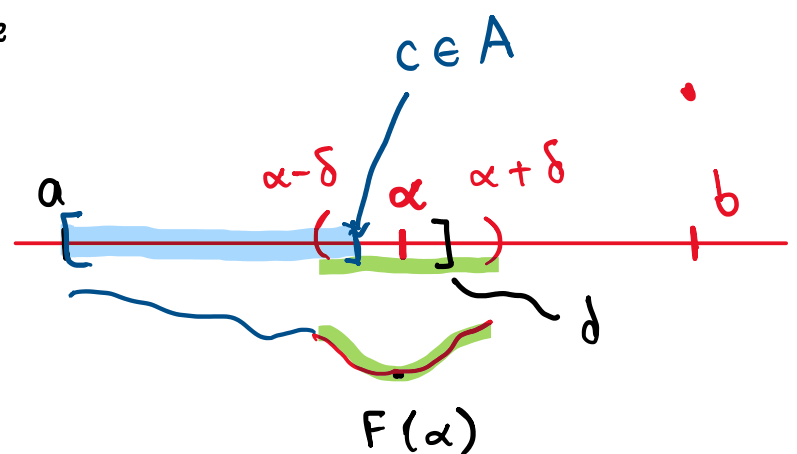
Caso 1: $F(\alpha) < 0$. Como F es continua en α y $F(\alpha) < 0$,

por el Lema (2)2), existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \quad F(x) < 0.$$

Como $\alpha = \sup A$, por el lema (1),
 existe $c \in A$ tal que $\alpha - \delta < c \leq \alpha$.

$$\Rightarrow \forall x \in [a, c] \quad F(x) < 0$$



Notemos que como $F(b) > 0 \Rightarrow \alpha + \delta \leq b$

$$\text{Sea } d \in (\alpha, \alpha + \delta) \Rightarrow a \leq c \leq \alpha < d < \alpha + \delta \leq b \Rightarrow d \in [a, b]$$

Como $[a, d] \subseteq [a, \alpha + \delta) \Rightarrow F(x) < 0$ para toda $x \in [a, d]$

$$\Rightarrow d \in A \quad \text{y} \quad \sup A = \alpha < d!$$

$\therefore$ este caso no es posible.

Caso 2: $F(\alpha) > 0$.

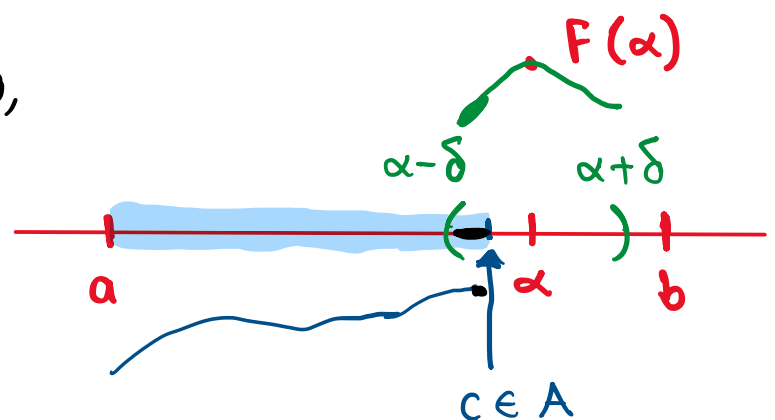
Como F es continua en α y $F(\alpha) > 0$,
 por Lema (2)1), existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \quad F(x) > 0 \quad (*)$$

Como $\alpha = \sup A$, por el Lema (1)

existe $c \in A$ tal que $\alpha - \delta < c \leq \alpha$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, c] \quad F(x) < 0$$



En particular, como $c \in [a, c] \Rightarrow F(c) < 0$.

Por otro lado, como $c \in A \Rightarrow c \in [a, b]$ y además $\alpha - \delta < c \leq \alpha < \alpha + \delta$
 $\Rightarrow c \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow F(c) > 0$!
(*)

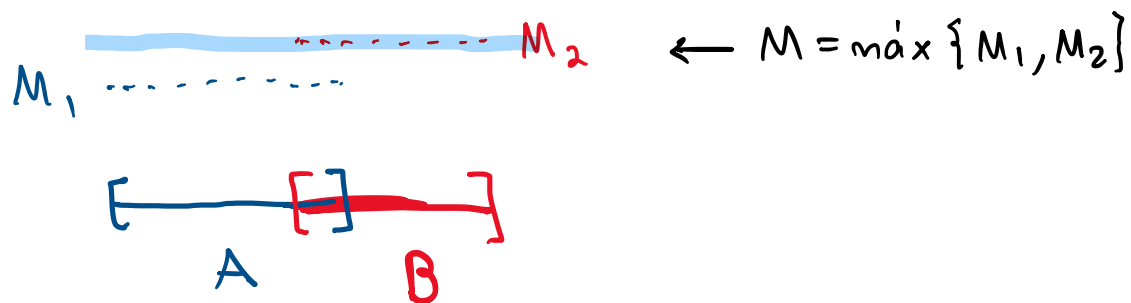
$\therefore$ este caso tampoco es posible.

Por tricotomía, concluimos que $F(\alpha) = 0$.

Definición. Una función F está acotada superiormente en A si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A \quad F(x) \leq M$

Proposición. Si F está acotada superiormente en A y F está acotada superiormente en B , entonces F está acotada superiormente en $A \cup B$.

Dem. (Ejercicio)



③ Lema. Si F es continua en a , entonces existe $\delta > 0$ tal que F está acotada superiormente en $(a - \delta, a + \delta) \cap \text{Dom}(F)$.

Demostración

Sea $\varepsilon = 1$. Como F es continua en a , entonces existe $\delta > 0$ tal que

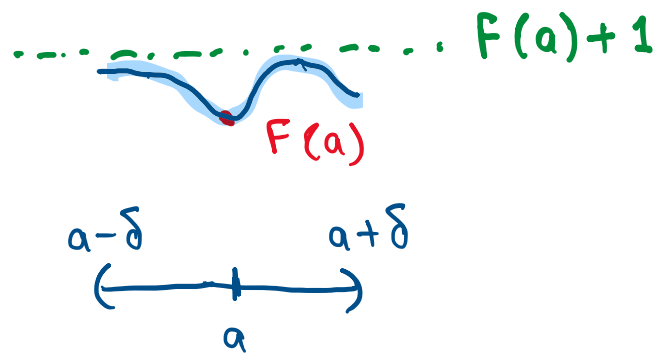
$$\forall x \in \text{Dom}(F) \quad (|x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(a)| < 1)$$

Sea $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \text{Dom}(F)$

$$\Rightarrow x \in \text{Dom}(F) \quad \text{y} \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(a)| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < F(x) - F(a) < 1 \Rightarrow F(a) - 1 < F(x) < F(a) + 1$$

$$\therefore \forall x \in \text{Dom}(F) \cap (a - \delta, a + \delta) \quad F(x) < F(a) + 1.$$



Teorema. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$.

Demostración.

Sea $B = \{c \in [a, b] \mid f \text{ está acotada superiormente en } [a, c]\}$

Como f está acotada superiormente en $[a, a] = \{a\}$

(pues $\forall x \in [a, a] \quad f(x) \leq f(a)$) y $a \in [a, b] \Rightarrow a \in B. \Rightarrow B \neq \emptyset$.
 $M = f(a)$

Por otro lado, como $B \subseteq [a, b] \Rightarrow B$ está acotado superiormente por b .

Luego, B tiene supremo. Sea $\alpha = \sup B$

Como b es cota superior de $B \Rightarrow \alpha \leq b$.

Además, como $a \in B \Rightarrow a \leq \alpha \Rightarrow \alpha \in [a, b]$.

Queremos probar que $\alpha = b$.

• Supongamos que $\alpha < b$.

Como f es continua en α , por el Lema (3) existe $\delta > 0$ tal que

f está acotada superiormente en $[a, b] \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

Como $\alpha = \sup B$, por el Lema (1) existe $c \in B$ tal que $\alpha - \delta < c \leq \alpha$.

$\Rightarrow f$ está acotada superiormente en $[a, c]$.

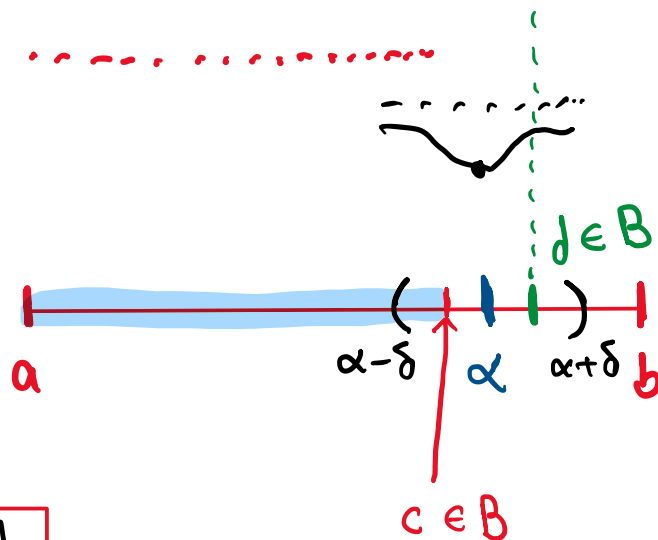
$\Rightarrow f$ está acotada superiormente en $[a, c] \cup ([a, b] \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta))$.

Como $\alpha < b$, entonces existe $d \in (\alpha, \alpha + \delta)$ tal que $d < b$

$\Rightarrow a \leq \alpha < d < b \Rightarrow d \in [a, b]$ y f está acotada superiormente en $[a, d]$

$\Rightarrow d \in B$ y $\sup B = \alpha < d$!

$\therefore \alpha = b$.



A continuación demostraremos que $b \in B$, es decir, que f está acotada superiormente en $[a, b]$.

Sabemos que $\alpha = b = \sup B$.

Como f es continua en b , por el Lema ③ existe $\delta > 0$ tal que f está acotada superiormente en $[a, b] \cap (b - \delta, b + \delta) = [a, b] \cap (b - \delta, b]$.

Como $b = \sup B$, entonces por el Lema ① existe $c \in B$ tal que $b - \delta < c \leq b$

$\Rightarrow f$ está acotada superiormente en $[a, c]$

$\Rightarrow f$ está acotada superiormente en

$$[a, c] \cup ([a, b] \cap (b - \delta, b]) = [a, b]$$

$\therefore f$ está acotada superiormente en $[a, b]$.

