

Límites infinitos

martes, 7 de diciembre de 2021

Lema. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty) \subset A$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1) Si $c > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = \infty$.

2) Si $c < 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = -\infty$.

Dem. 1) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

P.D. $\exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow c f(x) > \alpha)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, existe $K > a$ t. q. si $x \in A$ y $x > K$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{\alpha}{c}, \quad c > 0$$

$$\Rightarrow c f(x) > \alpha \quad \text{p. c. } x > K$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = \infty.$$

2) Ejercicio ■

Teorema. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t. q. $(a, \infty) \subset A$ y $f(x) \leq g(x)$ p. c. $x \in (a, \infty)$.

1) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

2) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

Dem. 2) Sea $\beta \in \mathbb{R}$.

P.D. $\exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow f(x) < \beta)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, existe $K > a$ t. q. si $x \in A$ y $x > K$

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x) < \beta$$

$$\Rightarrow f(x) < \beta \quad \text{p. c. } x > K$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \blacksquare$$

Teorema. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $(a, \infty) \subset A$, $g(x) \neq 0$ p.c. $x \in (a, \infty)$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

1) Si $L > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

2) Si $L < 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Dem. 1) Ya que $L > 0$, por hipótesis existe $K > a$ t.q. si $x > K$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \frac{L}{2} \quad \text{y} \quad g(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - L < \frac{L}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{L}{2}\right) g(x) < f(x) < \left(\frac{3L}{2}\right) g(x), \quad \frac{L}{2}, \frac{3L}{2} > 0$$

Aplicando los resultados anteriores, se sigue que:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3L}{2}\right) g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{2}\right) g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2) Ejercicio

Ejemplo. Sea $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,
con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.

Calculemos $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$.

Sea $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $q(x) = x^n$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

Notemos que p y q están definidas en $(1, \infty)$ y se prueba que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^i} = 0 \quad \text{p.c. } i \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$$

Ya sabemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$, y $a_n \neq 0$. Por el teorema anterior:

$$\sim \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty \quad \text{si } a_n > 0.$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty \quad \text{si } a_n < 0.$$

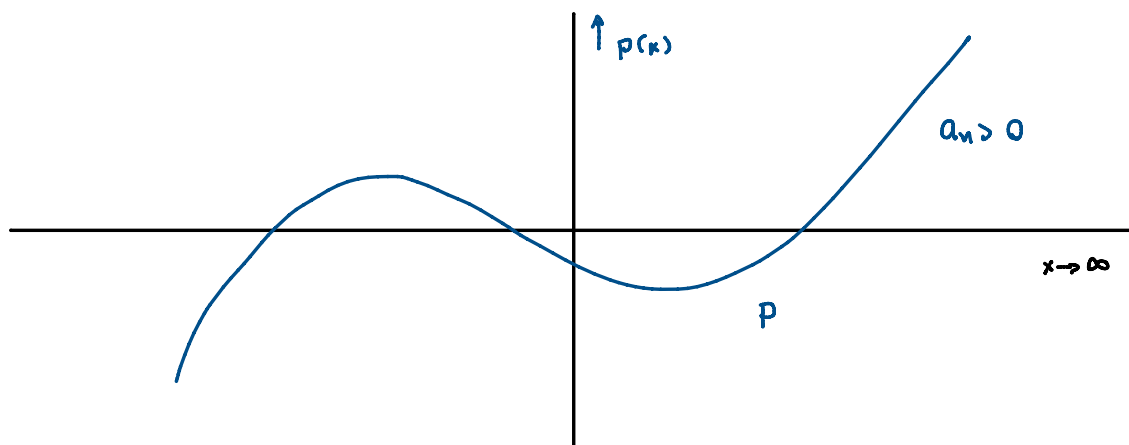
Por otra parte, vimos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = \infty$ si n es par y $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = -\infty$ si n es impar. Entonces se puede probar que:

$$\sim \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \infty \quad \text{si } a_n > 0 \text{ y } n \text{ es par}$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \quad \text{si } a_n > 0 \text{ y } n \text{ es impar}$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \quad \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ es par}$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \infty \quad \text{si } a_n < 0 \text{ y } n \text{ es impar.}$$



Definición. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

$$\sim \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha)$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta)$$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

Sea $\alpha > 0$ y definimos $\delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 0$.

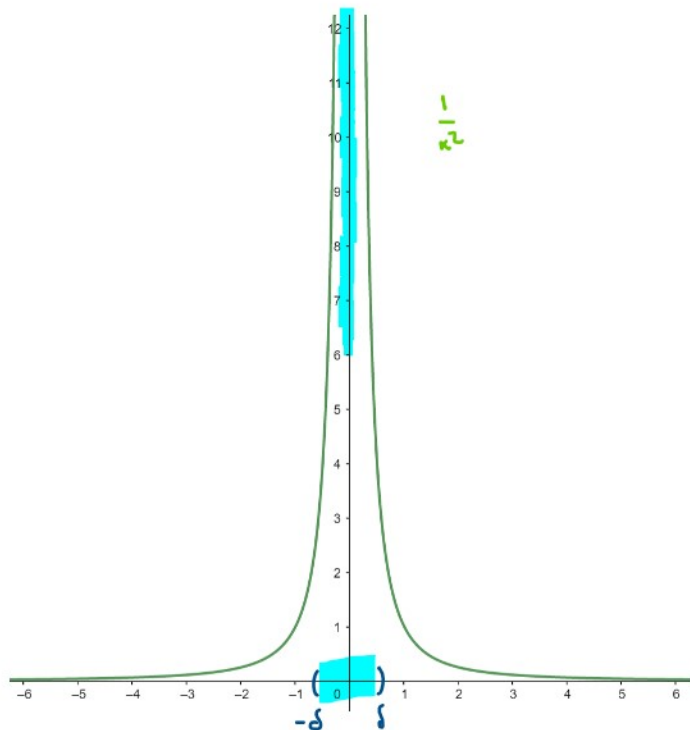
$$\text{Si } x \in D_{\frac{1}{x^2}} \text{ y } |x-0| < \delta$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \alpha$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



Definición. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

$$\sim \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \iff \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 \leq a-x < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha)$$

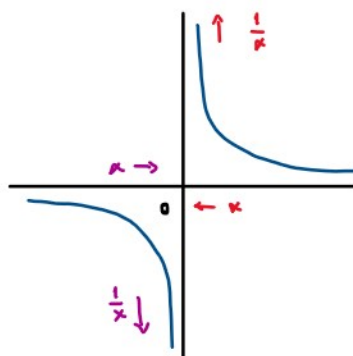
$$\sim \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 \leq a-x < \delta \Rightarrow f(x) < \beta)$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \iff \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha)$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \iff \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 \leq x-a < \delta \Rightarrow f(x) < \beta)$$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$



Ejercicio. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(-\infty, 0) \subset A$ y $L \in \mathbb{R}$. Prueba que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$

Sol. $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists \delta > 0 \forall x \in A (0 \leq 0 - x < \delta \Rightarrow |f\left(\frac{1}{x}\right) - L| < \varepsilon)$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, existe $K < 0$ t. q. si $x \in A$ y $x < K$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definamos $\delta = -\frac{1}{K} > 0$. Si $x \in A$ y $0 < -x < \delta$

$$\Rightarrow 0 < -x < -\frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow 0 < -K < -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} < K$$

$$\Rightarrow |f\left(\frac{1}{x}\right) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$$

$\Leftarrow$ Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists K < 0 \forall x \in A (x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$, existe $\delta > 0$ t. q. si $0 < -x < \delta$

$$\Rightarrow |f\left(\frac{1}{x}\right) - L| < \varepsilon$$

Definamos $K = -\frac{1}{\delta} < 0$. Si $x \in A$ y $x < K$

$$\Rightarrow x < -\frac{1}{\delta} < 0$$

$$\Rightarrow -x > \frac{1}{\delta} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < -\frac{1}{x} < \delta$$

$$\Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{x}\right) - L \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$