

Continuidad

lunes, 6 de diciembre de 2021

Definición. Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Decimos que F es continua en a (o en $x=a$) si

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a),$$

es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_F \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(a)| < \varepsilon \right)$$

Notemos que si, $0 = |x-a| \Rightarrow x=a \Rightarrow |F(x) - F(a)| = 0 < \varepsilon$.

Por lo anterior,

F es continua en $a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_F \left(|x-a| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(a)| < \varepsilon \right)$$

(Definición ε - δ de continuidad)

Teorema Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Son equivalentes:

(1) F es continua en a

(2) Para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A se cumple que

si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(a)$

Demostración: (ejercicio).

Teorema Sean $F, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funciones y $a \in A$.

Si F y g son continuas en a , entonces:

1) $F+g$ es continua en a

2) $F \cdot g$ es continua en a

3) si $c \in \mathbb{R}$, entonces cF es continua en a

4) si $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{F}{g}$ es continua en a

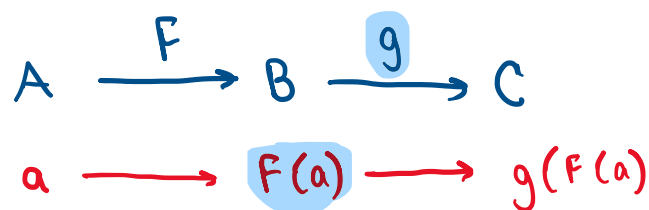
5) $F-g$ es continua en a .

Demostración

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow a} (F+g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} F(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\text{Teo. sobre límites}) \\ &= F(a) + g(a) \quad (F \text{ y } g \text{ son continuas en } a) \\ &= (F+g)(a) \\ &\therefore F+g \text{ es continua en } a. \end{aligned}$$

2) - 5) Ejercicio.

Teorema. Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A = \text{Dom}(F)$.
Si F es continua en a y g es continua en $F(a)$, entonces
 $g \circ F$ es continua en a .



Demostración

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |(g \circ F)(x) - (g \circ F)(a)| < \varepsilon \right)$$

$\uparrow$
 $\text{Dom}(g \circ F)$

$$|g(F(x)) - g(F(a))| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como g es continua en $F(a)$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall x \in B \left(|x - F(a)| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(F(a))| < \varepsilon \right) \quad (*)$$

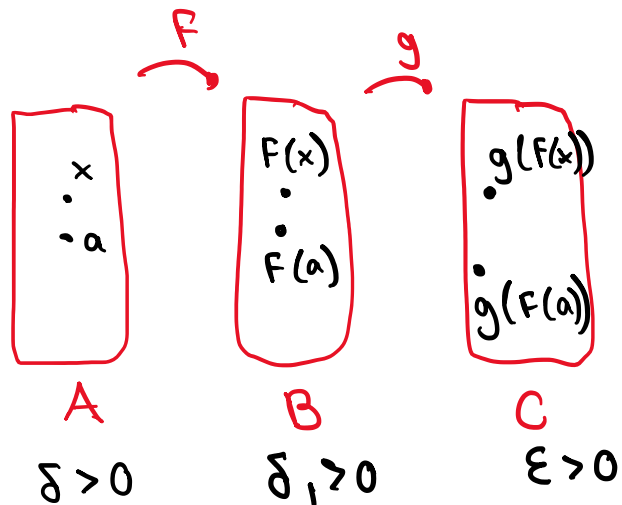
$\uparrow$
 $\text{Dom}(g)$

Como F es continua en a y $\delta_1 > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(a)| < \delta_1 \right) \quad (**)$$

$\uparrow$
 $\text{Dom}(F)$

$$\text{Sea } x \in A \text{ tal que } |x - a| < \delta \stackrel{(**)}{\Rightarrow} |F(x) - F(a)| < \delta_1$$



$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |g(F(x)) - g(F(a))| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(g \circ F)(x) - (g \circ F)(a)| < \varepsilon$$

$\therefore g \circ F$ es continua en a

Teorema Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ y $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ y g es continua en L , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(F(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} F(x)\right) = g(L)$$

Demostración.

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(F(x)) - g(L)| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como g es continua en L , entonces existe $\delta_1 > 0$ t.q.

$$\forall x \in B (|x - L| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(L)| < \varepsilon). \quad (o)$$

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ y $\delta_1 > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \delta_1) \quad (\Delta)$$

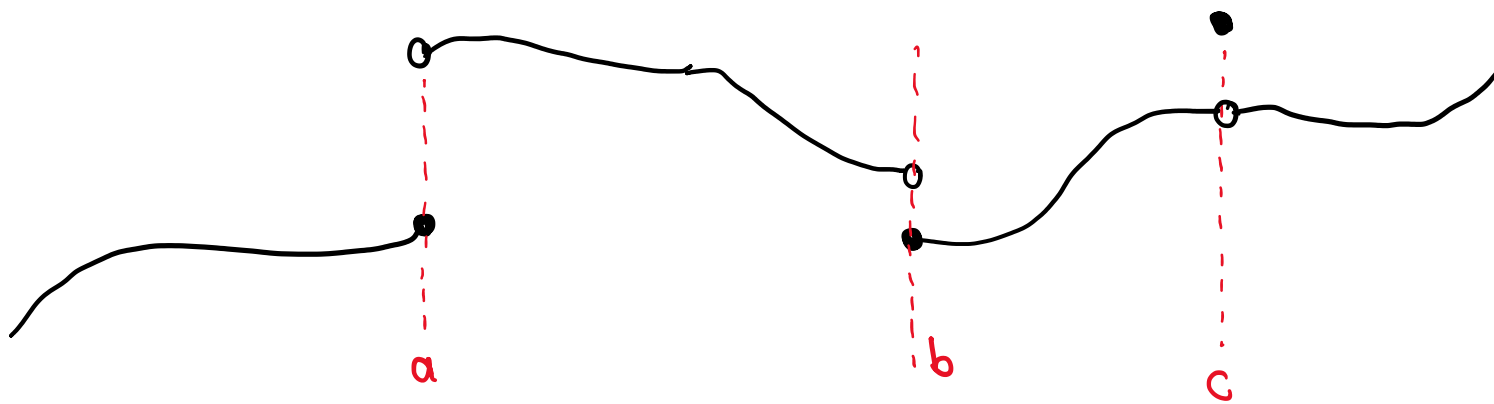
Sea $x \in A$ t.q. $0 < |x - a| < \delta \stackrel{(\Delta)}{\Rightarrow} |F(x) - L| < \delta_1$

$$\stackrel{(o)}{\Rightarrow} |g(F(x)) - g(L)| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} g(F(x)) = g(L) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} F(x)\right).$$

Definición Una Función F es:

- continua por la izquierda en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$.
- continua por la derecha en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$



F es continua por la izquierda en a

F es continua por la derecha en b

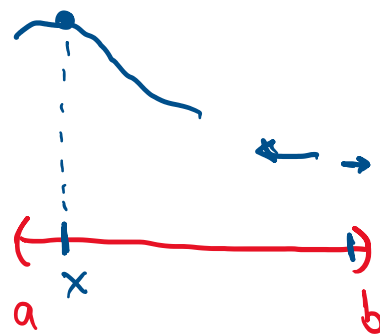
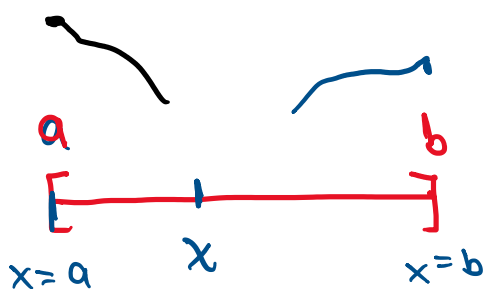
F no es continua por la izquierda ni por la derecha en c .

Observación: F es continua en $a \iff F$ es continua por la izquierda y por la derecha en a .

Definición

Una función F es continua en (a, b) si F es continua en todo número de (a, b) .

Una función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ si F es continua en (a, b) , F es continua por la derecha en a y F es continua por la izquierda en b .



Corolario Si g es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(F(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} F(x)\right)$$

siempre que $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ exista.

Ejemplos:

- Si F es una función racional, $F(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \frac{a_n x_0^n + \dots + a_0}{b_m x_0^m + \dots + b_0} = F(x_0) \quad \text{siempre que } b_m x_0^m + \dots + b_0 \neq 0,$$

es decir, si $x_0 \in \text{Dom}(F)$.

$\therefore F$ es continua en x_0 para toda $x_0 \in \text{Dom}(F)$

- En particular, todas las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

(los exponentes de x son mayores o iguales a cero)

- $F(x) = \frac{1}{x}$ es una función racional
es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ si $a \neq 0$.

* Usaremos que las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$$

- Como $\sin(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 8} \sin\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x+1}\right) = \sin\left(\frac{1}{9}\right)$$

- $g(x) = \sqrt{x}$

Como $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x}$ es continua en a si $a > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + 5x - 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 5x - 4} = \sqrt{20}$$

Teorema

- 1) Si f es continua en a y $f(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que
 $\forall x \in D_f (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0)$.
- 2) Si f es continua en a y $f(a) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que
 $\forall x \in D_f (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < 0)$.

Demostración.

- 1) Sea $\varepsilon = f(a) > 0$. Como f es continua en a , entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < f(a)$$

$$\Rightarrow -f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$$

$$\Rightarrow \underline{0 < f(x) < 2f(a)} \Rightarrow f(x) > 0.$$

2) Ejercicio.

