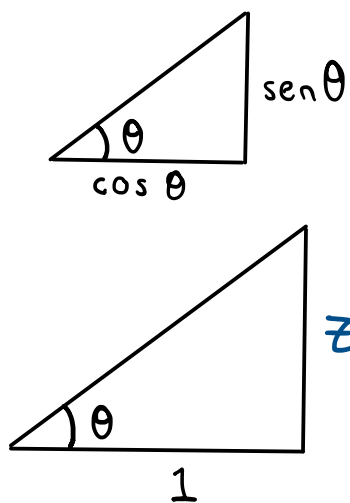
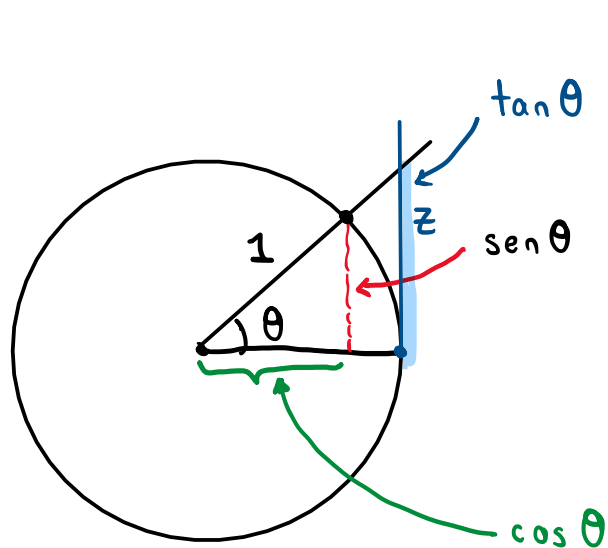


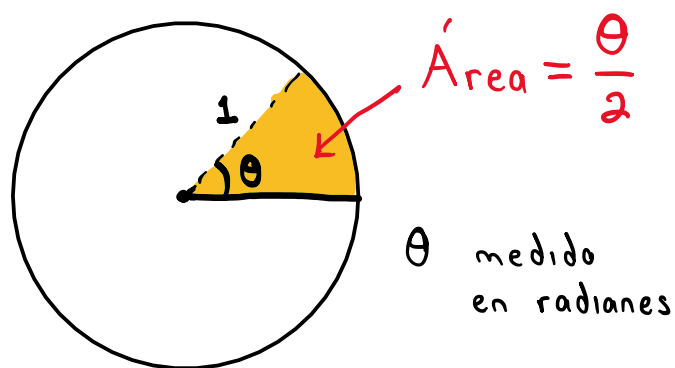
El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$



Triángulos semejantes

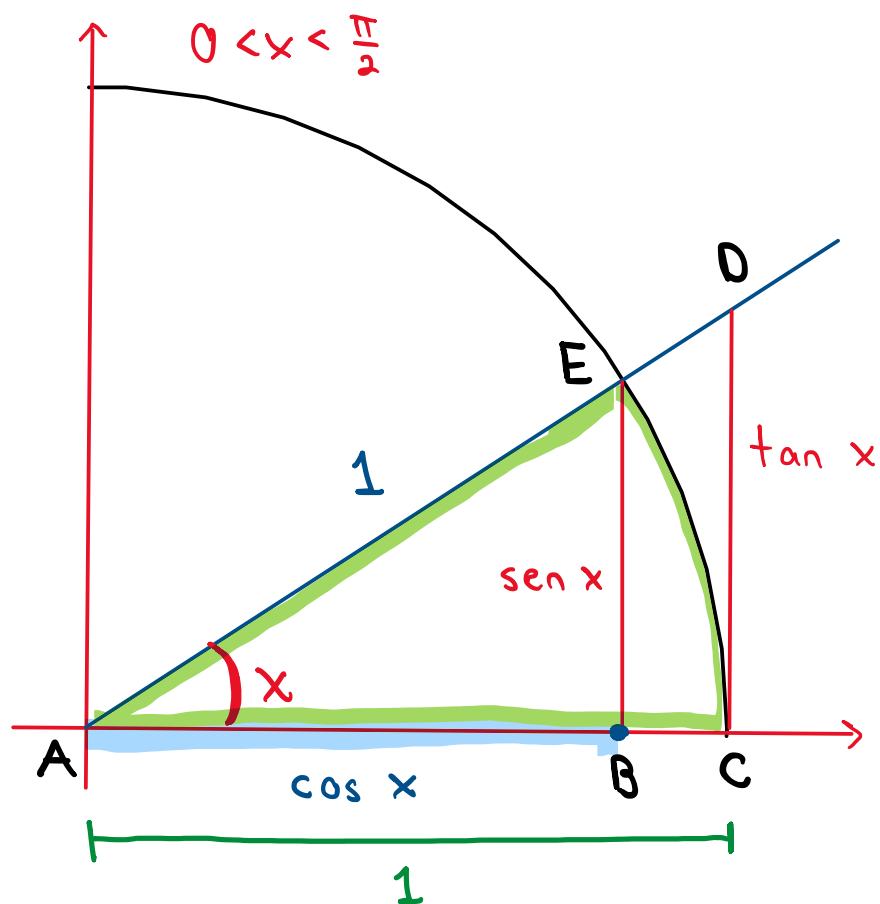
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{z}{1}$$

$$z = \tan \theta$$



	Área	Ángulo (en radianes)
	$\pi(1)^2 = \pi$	2π
	$x = \frac{\theta}{2}$	θ

$$x = \frac{\theta \pi}{2 \pi} = \frac{\theta}{2}$$



$$\text{Área } \triangle ABE \leq \text{Área } \text{Sector } ABE \leq \text{Área } \triangle ACD$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

mult. 2

$$\Rightarrow 0 < \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$\sin x > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Sean $a_1 > 0$ y $a_{n+1} = a_n - 1 + \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

¿La sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge? En caso de que sí, calcula su límite.

AF. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Supongamos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Como $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n - 1 + \frac{1}{n}$, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ de ambos lados tenemos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - 1 + \frac{1}{n} \right) = L - 1 + 0 = L - 1$$

$(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es cola subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow L = L - 1 \Rightarrow 0 = -1 !$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

$$a_2 = a_1 - 1 + \frac{1}{1}$$

$$a_2 = a_1$$

$$a_3 = a_2 - 1 + \frac{1}{2}$$

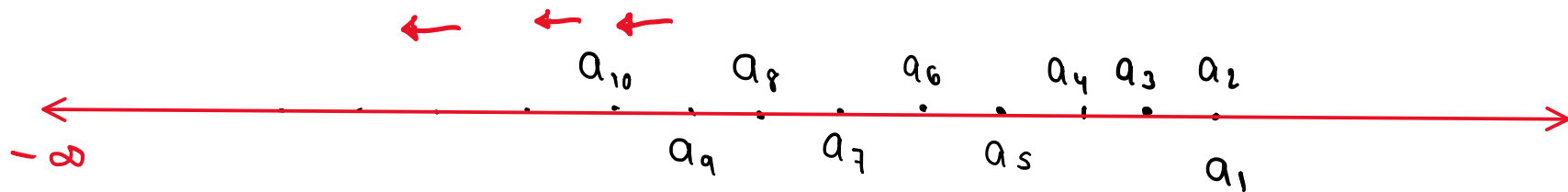
$$a_3 = a_2 - \frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 - 1 + \frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_3 - \frac{2}{3}$$

$$a_5 = a_4 - \frac{3}{4}$$

$$a_6 = a_5 - \frac{4}{5}$$



Sean $a_1 > 2$ y $a_{n+1} = 4 - \frac{4}{a_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

¿La sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge? En caso de que sí, calcula su límite.

P.D. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada

P.D. $\forall n \geq 2 \quad 2 < a_n < 4$



a_1

(Base $n=2$)

$$\begin{aligned} \text{Como } a_1 > 2 &\Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 > -\frac{4}{a_1} > -2 \Rightarrow 4 > 4 - \frac{4}{a_1} > 2 \\ &\Rightarrow 4 > a_2 > 2 \end{aligned}$$

Sea $n \geq 2$ y sup. que $2 < a_n < 4$. P.D. $2 < a_{n+1} < 4$

$$\begin{aligned} \text{Como } 2 < a_n < 4 &\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{4} \Rightarrow -2 < -\frac{4}{a_n} < -1 \xrightarrow{+4} 2 < 4 - \frac{4}{a_n} < 3 < 4 \\ &\Rightarrow 2 < a_{n+1} < 4. \end{aligned}$$

$\therefore \forall n \geq 2 \quad 2 < a_n < 4$

Concluimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.

¿ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente?

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} &\Leftrightarrow a_n \geq 4 - \frac{4}{a_n} \xrightarrow{a_n > 0} a_n^2 \geq 4a_n - 4 \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a_n - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como $(a_n - 2)^2 \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $a_n \geq a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Dado que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y acotada $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow 2 \leq L \leq 4$.

Como $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = 4 - \frac{4}{a_n}$, tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \frac{4}{a_n} = 4 - \frac{4}{L}$$

$(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es cola o subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(porque $L \neq 0$)

$$\Rightarrow L = 4 - \frac{4}{L} \Rightarrow L^2 = 4L - 4 \Rightarrow L^2 - 4L + 4 = 0 \Rightarrow (L - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow L - 2 = 0 \Rightarrow L = 2$$

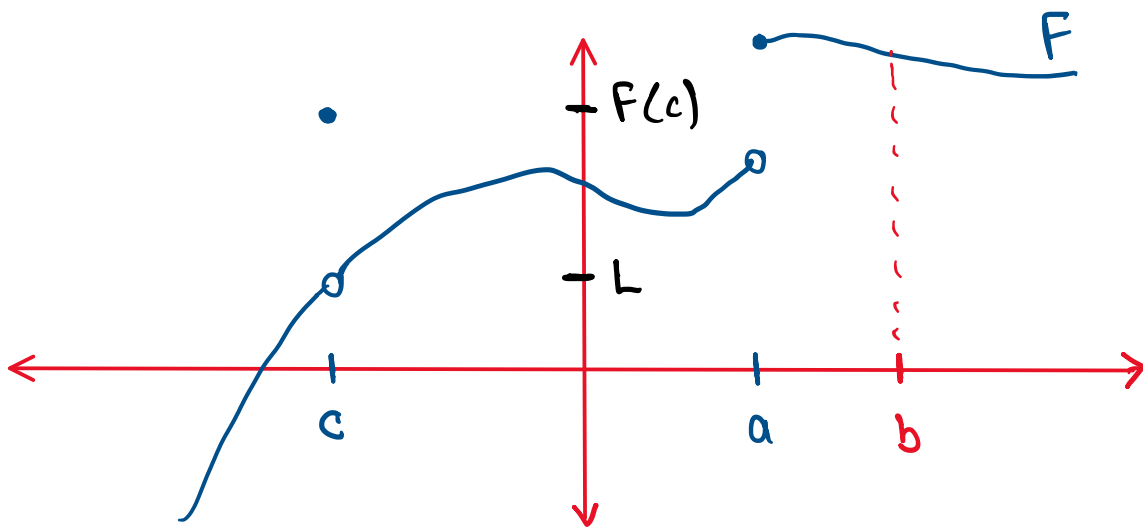
Continuidad

Definición. Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Decimos que F es continua en a (o en $x=a$) si

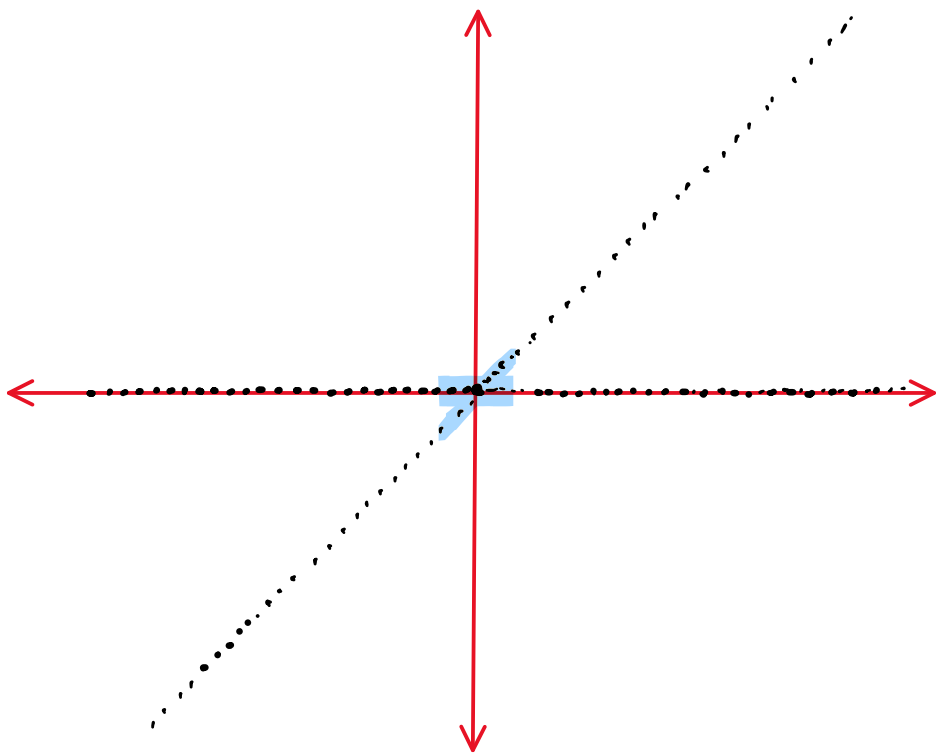
$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a).$$

Observación: Si F es continua en a , entonces

- i) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ existe
- ii) $F(a)$ está definido ($a \in \text{Dom}(F)$)
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ coincide con $F(a)$.



- F no es continua en a porque $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ no existe.
- Aunque $\lim_{x \rightarrow c} F(x)$ existe y $F(c)$ también, F no es continua porque $\lim_{x \rightarrow c} F(x) \neq F(c)$.



$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

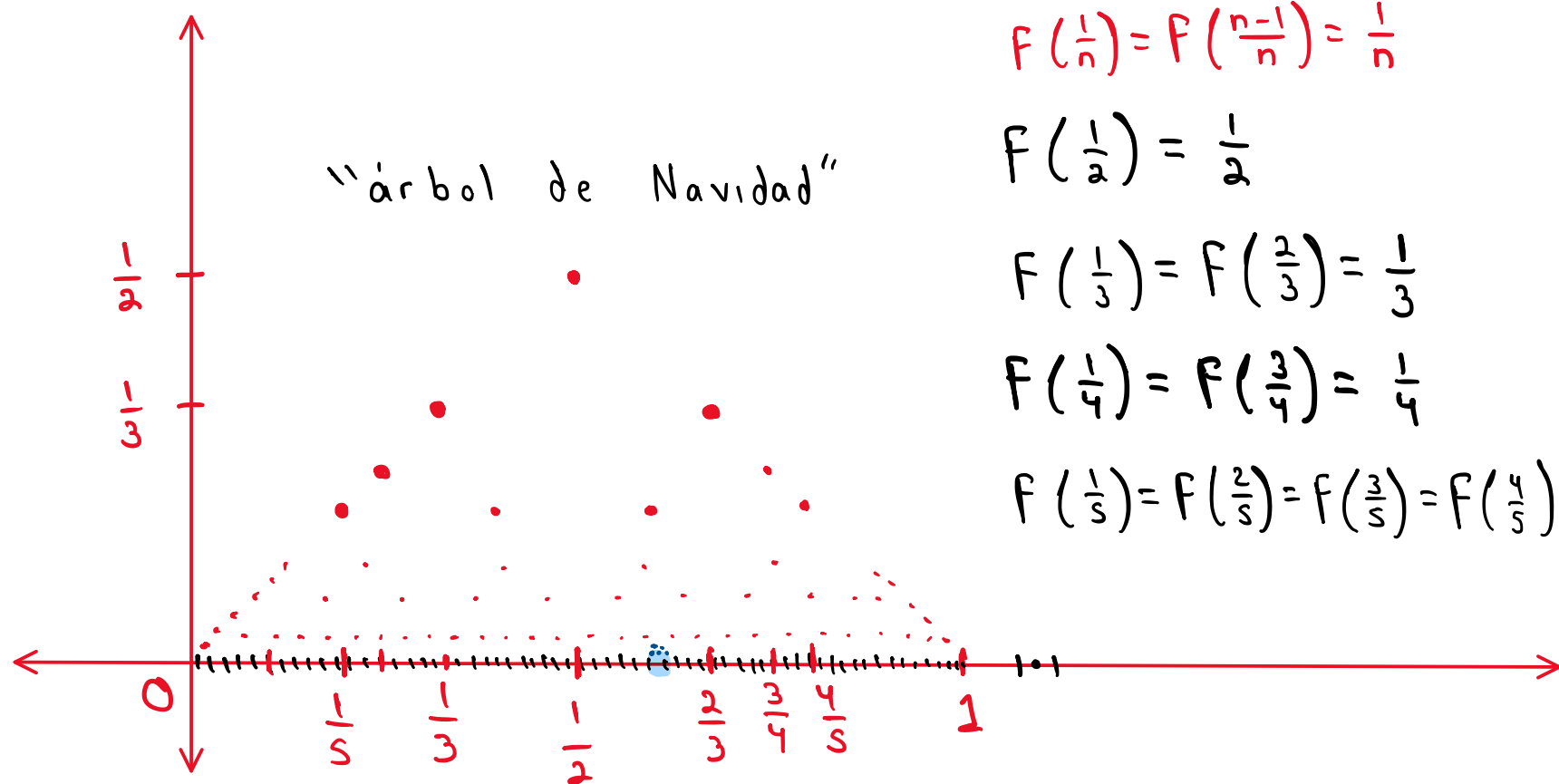
Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$$

$\Rightarrow F$ es continua en $x=0$.

Función de Thomae $F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible,} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



* Veremos que F es continua en $x=a \iff a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$