

Límites en el infinito

jueves, 2 de diciembre de 2021

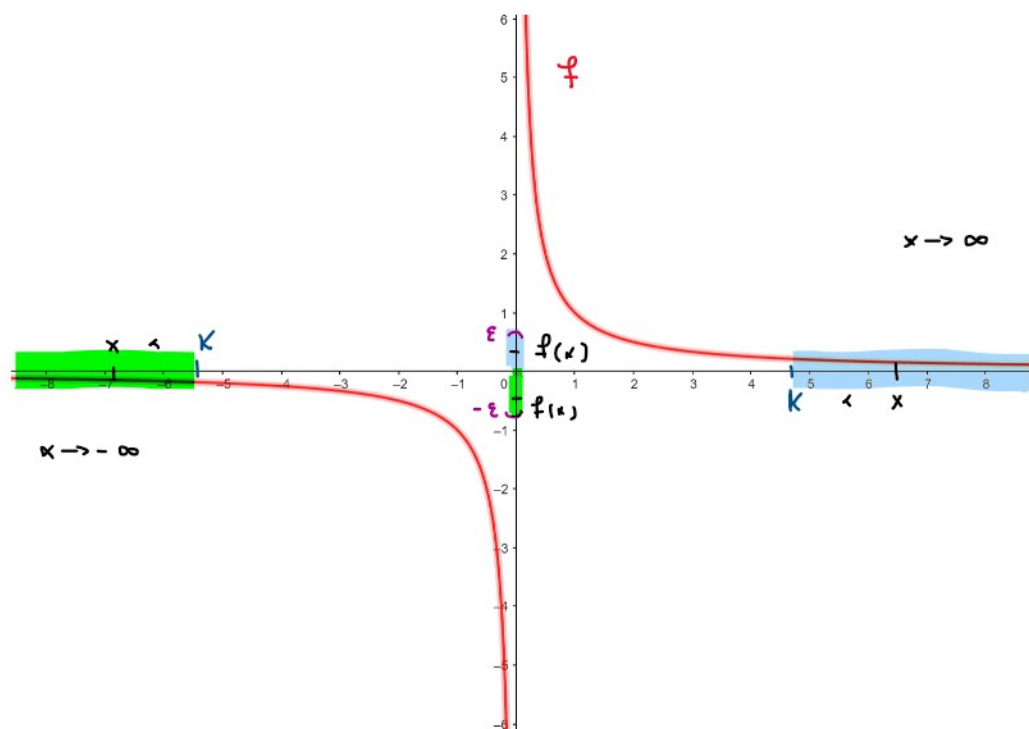
Teorema. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L_2$.

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = L_1 L_2$;
- 3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^-} c \cdot f(x) = c L_1$;
- 4) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$;
- 5) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Dem. Tarea

~ Este teorema también es válido cuando $x \rightarrow a^+$.

¿Qué comportamiento tiene una función f para x muy grandes?



Definición. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$.

1) Si $(a, \infty) \subset A$ p.a. $a \in \mathbb{R}$, decimos que L es el límite de f cuando $x \rightarrow \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

2) Si $(-\infty, b) \subset A$ p.a. $b \in \mathbb{R}$, decimos que L es el límite de f cuando $x \rightarrow -\infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists K < b \forall x \in A (x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Notemos que $(0, \infty) \subset D_{\frac{1}{x}}$, y sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists K > 0 \forall x \in D_{\frac{1}{x}} (x > K \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} < \varepsilon)$

Por p. A. existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K} < \varepsilon$.

Sea $x \in D_{\frac{1}{x}}$ t. q. $x > K > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{K}$

$$\Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} < \frac{1}{K} < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Similarmente se prueba que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Notemos que $(-\infty, 0) \subset D_{\frac{1}{x^2}}$, y sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists K < 0 \forall x \in D_{\frac{1}{x^2}} (x < K \Rightarrow |\frac{1}{x^2} - 0| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon)$

Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ t. q. $\sqrt{\varepsilon} > \frac{1}{N} > 0$.

Definimos $K = -N < 0$

Sea $x \in D_{\frac{1}{x^2}}$ t. q. $x < K < 0 \Rightarrow -x > -K = N > 0$

$$\Rightarrow x^2 = (-x)^2 > N^2$$

$$\Rightarrow |\frac{1}{x^2} - 0| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{N^2} < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Similarmente se prueba que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad x > 0.$

Notemos que $Df = (0, \infty)$, y sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists K > 0 \forall x \in (0, \infty) (x > K \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{x}} - 0| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon)$

Por p. A. existe $K \in \mathbb{N}$ t. q. $\frac{1}{K} < \varepsilon^2$

Sea $x \in (0, \infty)$ t. q. $x > K > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > \sqrt{K} > 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{K}} < \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Teorema. Sean $f, g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $(a, \infty) \subset A$ p. a. $a \in \mathbb{R}$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_2$. Se cumple que:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2;$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2;$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} cf(x) = cL_1;$

4) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2};$

5) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$

Dem 1) Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$, $\exists K_1 > a \forall x \in A (x > K_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2})$ y

como $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_2$, $\exists K_2 > a \forall x \in A (x > K_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}).$

Definimos $K = \max\{K_1, K_2\}$, y sea $x \in A$ t.q. $x > K$

$$x > K \geq K_1 \Rightarrow x > K_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad y$$

$$x > K \geq K_2 \Rightarrow x > K_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| &= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2.$$

(2), (3), (4) y (5): Ejercicios ■

Este teorema también es válido cuando $(-\infty, b) \subset A$ y $x \rightarrow -\infty$.

Definición. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Si $(a, \infty) \subset A$ p.a. $a \in \mathbb{R}$, decimos que f tiende a ∞ cuando $x \rightarrow \infty$ si $\forall \alpha > 0 \exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow f(x) > \alpha)$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

- 2) Si $(-\infty, b) \subset A$ p.a. $b \in \mathbb{R}$, decimos que f tiende a ∞ cuando $x \rightarrow -\infty$ si $\forall \alpha > 0 \exists K < b \forall x \in A (x < K \Rightarrow f(x) > \alpha)$, y se escribe

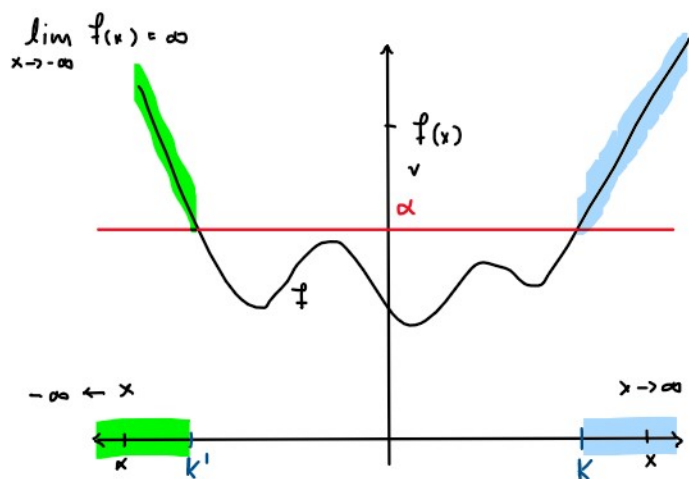
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

- 3) Si $(a, \infty) \subset A$ p.a. $a \in \mathbb{R}$, decimos que f tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ si $\forall \beta < 0 \exists K > a \forall x \in A (x > K \Rightarrow f(x) < \beta)$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

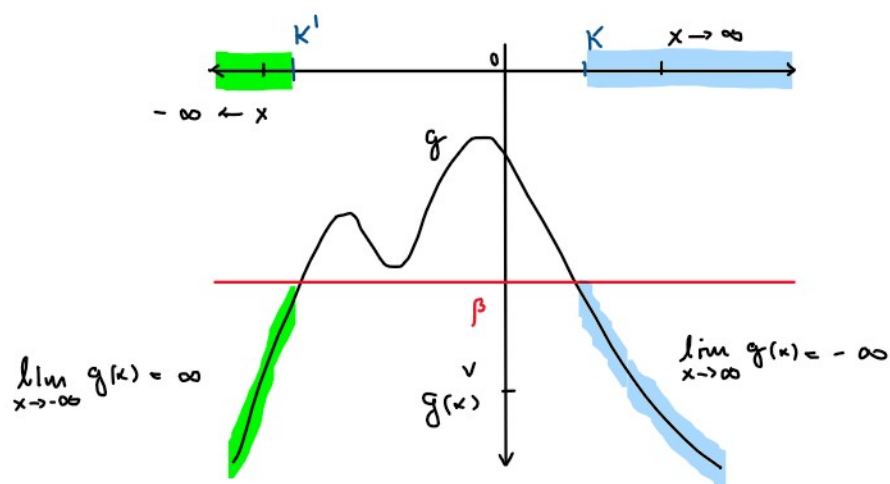
- 4) Si $(-\infty, b) \subset A$ p.a. $b \in \mathbb{R}$, decimos que f tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$ si $\forall \beta < 0 \exists K < b \forall x \in A (x < K \Rightarrow f(x) < \beta)$, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

A partir de K , f siempre rebasa a α



Ejemplo. Veamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ p.c. $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que $(0, \infty) \subset D_f$, y sea $\alpha > 0$

P.D. $\exists K > 0 \forall x \in D_f (x > K \Rightarrow x^n > \alpha)$

Definimos $K = \max\{\alpha, 1\} > 0$.

Si $x \in \mathbb{R}$ es t.q. $x > K$

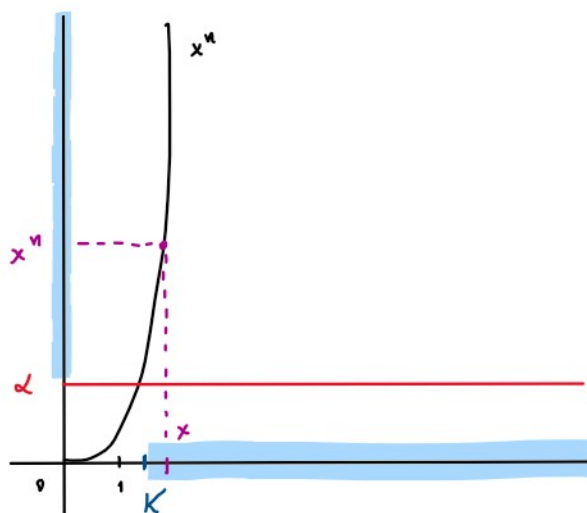
$$x > K \geq 1 \Rightarrow x > 1$$

$$\Rightarrow x^n > x$$

$$\text{Pero } x > K \geq \alpha \Rightarrow x > \alpha$$

$$\Rightarrow x^n > \alpha$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty.$$



Ejemplo. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ cuando $n \in \mathbb{N}$ es impar.

Como n es impar, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ t.q. $n = 2m + 1$

Notemos que $(-\infty, 0) \in D_f$, y sea $\beta < 0$.

P.D. $\exists K < 0 \forall x \in D_f (x < K \Rightarrow x^n < \beta)$

Definimos $K = \min\{\beta, -1\} < 0$.

Sea $x \in D_{x^n}$ t.q. $x < K$

$$x < K \leq -1 \Rightarrow x < -1 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 > 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x^2)^m > 1^m = 1$$

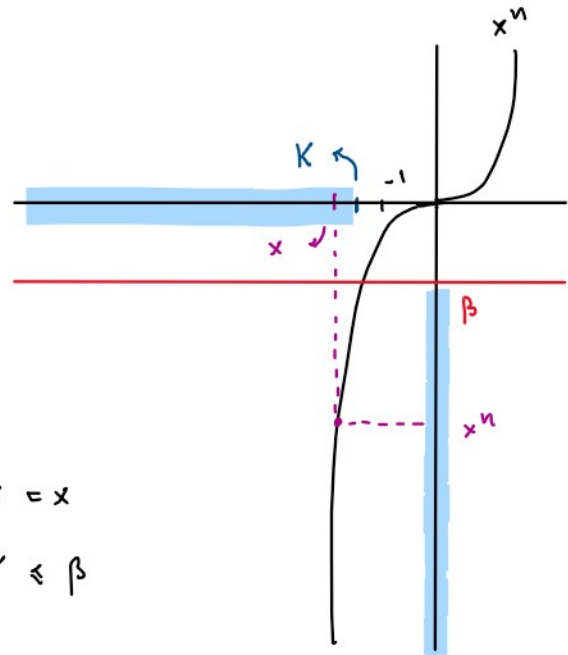
$$\Rightarrow x^{2m} > 1, \quad x < 0$$

$$\Rightarrow x^{2m+1} = x^{2m} \cdot x < 1 \cdot x = x$$

$$\Rightarrow x^n = x^{2m+1} < x \leq K \leq \beta$$

$$\Rightarrow x^n < \beta$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ cuando n es impar



Similarmemente se puede probar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ si n es par.