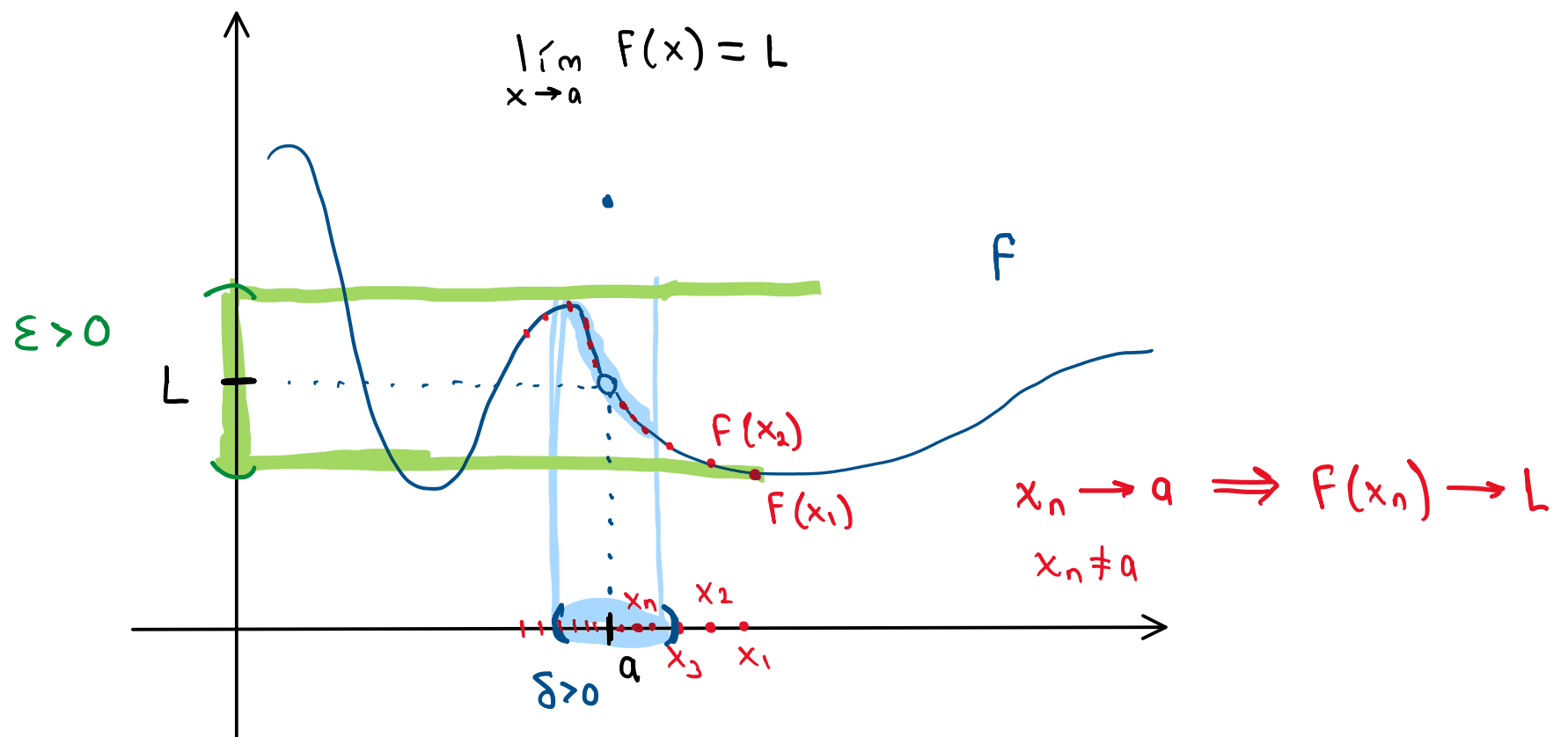




Teorema. Sean $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a, L \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$
- 2) Para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $A \setminus \{a\}$ se cumple que si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = L$.

Demostración.

2) $\Rightarrow$ 1) (Por contrapuesta) P.D. $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$

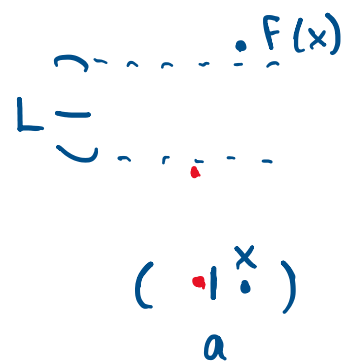
Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) \neq L$. Entonces

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad (0 < |x - a| < \delta \wedge |F(x) - L| \geq \varepsilon) \quad (*)$$

P.D. existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \neq L$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Tomando $\delta = \frac{1}{n} > 0$, debido a (*), existe $x_n \in A$ tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |F(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$



Notemos que $x_n \neq a$ porque $0 < |x_n - a|$, es decir, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en $A \setminus \{a\}$.

Como $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, por el teo. de compresión tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Sup. que $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = L$. Como $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(x_n) - L| \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow 0 = |L - L| = \lim_{n \rightarrow \infty} |F(x_n) - L| \geq \varepsilon \Rightarrow 0 \geq \varepsilon > 0 \quad \nabla \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \neq L$

1) $\Rightarrow$ 2) Sup. que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = L$.

Sea $\varepsilon > 0$. (P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |F(x_n) - L| < \varepsilon)$)

Como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in D_f \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon). \quad (*)$$

Por otro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ y $\delta > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta.$$

$$x \neq y \Leftrightarrow 0 \neq x - y \Leftrightarrow 0 < |x - y| \quad (**)$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta$. Como $x_n \neq a \Rightarrow |x_n - a| > 0$
 $\Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta \Rightarrow |F(x_n) - L| < \varepsilon.$

(*)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = L$$

Teorema de compresión

Sean $F, g, h: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funciones tales que $F(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$. Si $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Demostración. P.D. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $A \setminus \{a\}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L$.

Como $\forall x \in A \quad F(x) \leq g(x) \leq h(x)$, en particular tenemos que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n). \quad (*)$$

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces

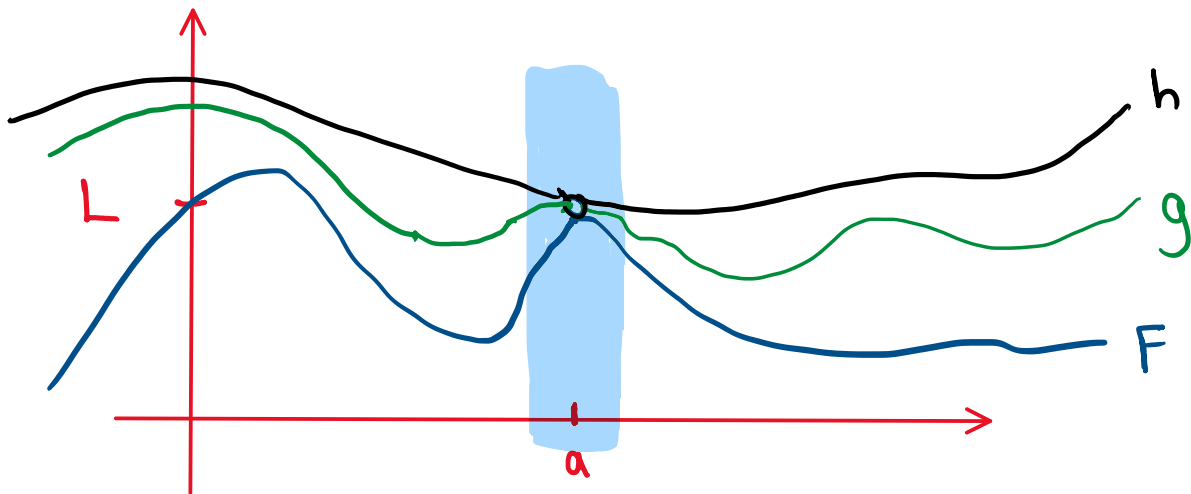
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = L \quad (**)$$

Por el teo. de compresión para sucesiones, deducimos de (*) y (**) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Ejercicio. Demostrar el teorema de compresión usando la definición de límite $(\varepsilon - \delta)$.



Teorema. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in A$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \right)$$

Demostración.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $A \setminus \{a\}$ tal que $x_n \rightarrow a$.

P.D. $\sqrt{f(x_n)} \rightarrow \sqrt{L}$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Dado que $f(x_n) \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{f(x_n)} = \sqrt{L}$ (Resultado previo sobre sucesiones)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

* Si $a_n \geq 0$ p.c. $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \rightarrow L \Rightarrow \sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{L}$.

Ejemplo: Utilizando sucesiones, demostrar que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_1 L_2$.

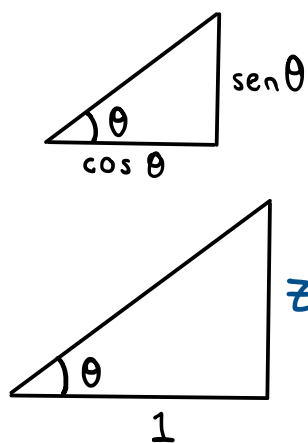
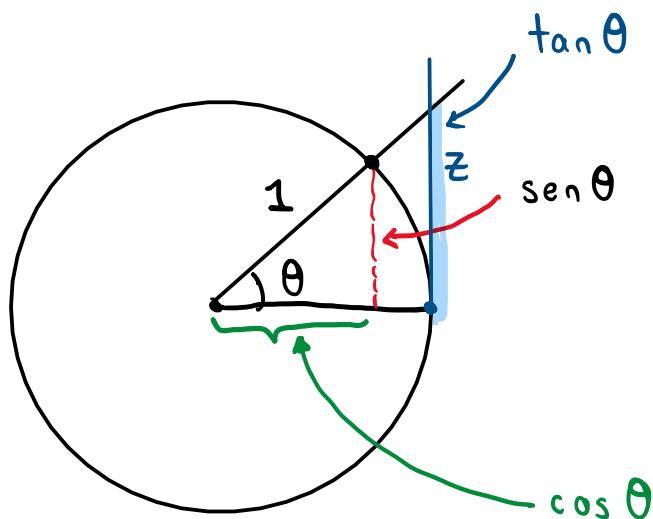
Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $D_{fg} \setminus \{a\}$ tal que $x_n \rightarrow a$,
P.D. $f(x_n)g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_1 L_2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Como $x_n \in D_{fg} \setminus \{a\} = (D_f \cap D_g) \setminus \{a\} = (D_f \setminus \{a\}) \cap (D_g \setminus \{a\})$, usando que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)g(x_n) = L_1 L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_1 L_2.$$

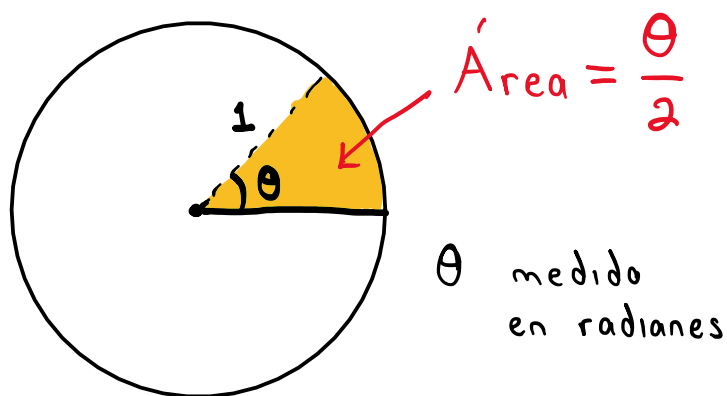
El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$



Triángulos semejantes

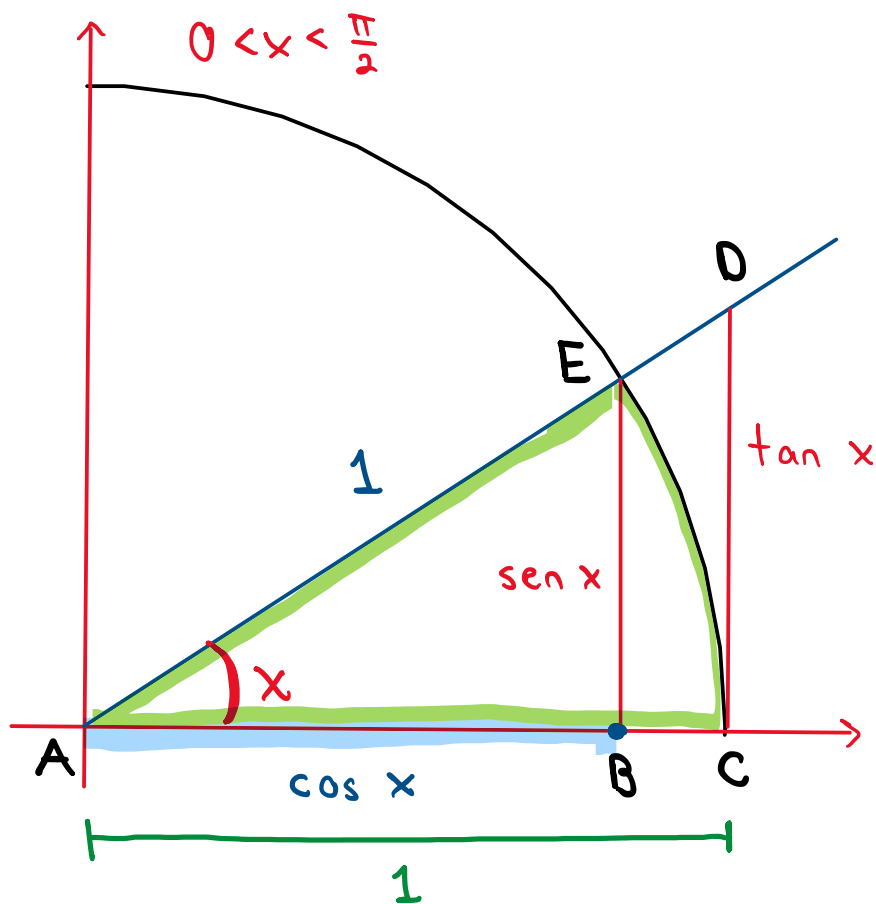
$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{z}{1}$$

$$z = \tan \theta$$



Área	Ángulo (en radianes)
$\pi(1)^2 = \pi$	2π
$x = \frac{\theta}{2}$	θ

$$x = \frac{\theta \pi}{2\pi} = \frac{\theta}{2}$$



$$\text{Área } \triangle ABE \leq \text{Área } \triangle ACE \leq \text{Área } \triangle ACD$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

mult. 2

$$\Rightarrow 0 < \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$\sin x > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$