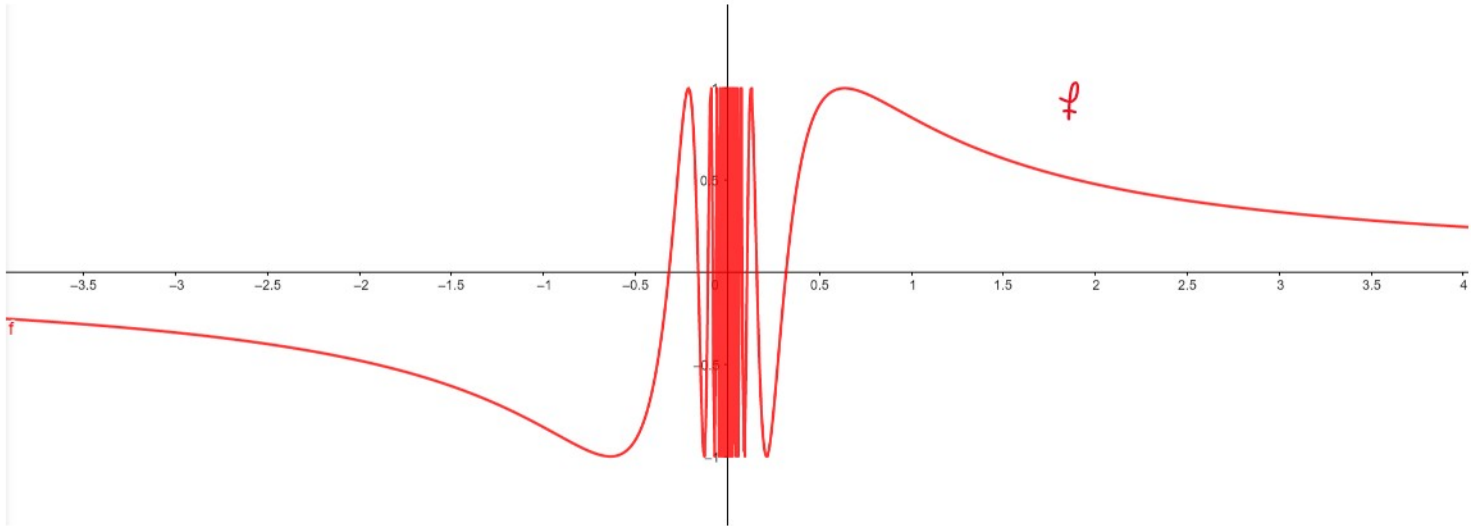


Límites laterales

martes, 30 de noviembre de 2021

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?



Sol. f no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$

Supongamos por contradicción que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ p.a. $L \in \mathbb{R}$

Ya que $-1 \leq f(x) \leq 1$ p.c. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow -1 \leq L \leq 1$

Sea $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $|x - 0| < \delta$
 $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$|\sin(x)| \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Caso 1: $L \in [-1, 0] \Rightarrow -L \geq 0$

Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\delta} > 0$

$$\Rightarrow 2\pi N + \frac{\pi}{2} > N > \frac{1}{\delta} > 0$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} < \delta$$

Definimos $y = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow |y - 0| = |y| = \left| \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} \right| = \frac{1}{2\pi N + \frac{\pi}{2}} < \delta$$

$$\Rightarrow |y - 0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(y) - 0| < \varepsilon$$

Pero

seno tiene periodo 2π

$$f(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi N + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow f(y) = 1 \quad y \quad -L > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - L \geq 1$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| = f(x) - L > 1 > \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon \quad \nabla$$

$$\operatorname{sen}(a)$$

$$= \operatorname{sen}(a + 2\pi)$$

$$= \operatorname{sen}(a + 2\pi + 2\pi)$$

$$= \operatorname{sen}(a + 2\pi \cdot 2)$$

$$= \operatorname{sen}(a + 2\pi \cdot 3)$$

$$= \dots$$

$$= \operatorname{sen}(a + 2\pi \cdot N)$$

Caso 2: $L \in [0, 1] \Rightarrow L < 1$

Por p. A. existe $M \in \mathbb{N}$ t. q. $\frac{1}{\delta} < M < 2\pi M + \frac{3\pi}{2}$

$$\text{Sea } z = \frac{1}{2\pi M + \frac{3\pi}{2}} \Rightarrow |z - 0| = z < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

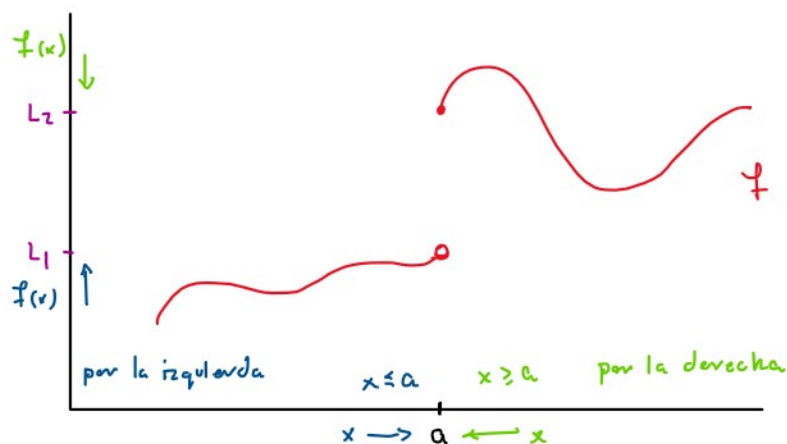
Pero $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi M + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$$\Rightarrow 1 = -f(z) \quad y \quad L > 1$$

$$\Rightarrow L - f(z) = L + 1 > 2$$

$$\Rightarrow |f(z) - L| = L - f(z) > 1 > \varepsilon \quad \nabla$$

$\therefore$ No existe $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$



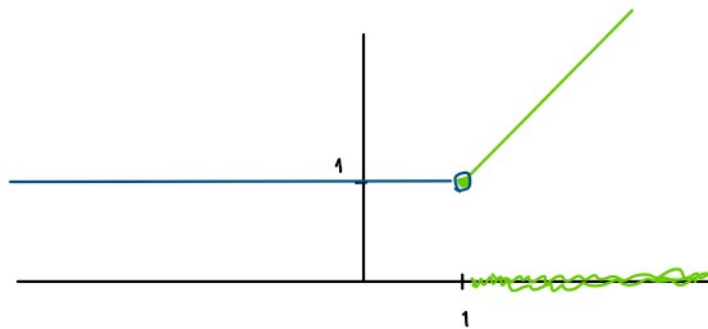
Definición. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a, L \in \mathbb{R}$. Decimos que

1) f tiende a L cuando $x \rightarrow a$ por la **izquierda** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 \leq a - x < \delta$ ent. $|f(x) - L| < \varepsilon$, y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

2) f tiende a L cuando $x \rightarrow a$ por la **derecha** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 \leq x - a < \delta$ ent. $|f(x) - L| < \varepsilon$, y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$



~ Veamos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

Sea $\varepsilon > 0$

$$(|f(x) - 1| < \varepsilon, x < 1 \iff |1 - 1| = 0 < \varepsilon)$$

Definimos $\delta = \varepsilon > 0$. Si $x \in D_f$ es tal que $0 < 1 - x < \delta$

$$\Rightarrow x < 1$$

$$\Rightarrow |f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \delta = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

~ Veamos que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$(|f(x) - 1| < \varepsilon, x > 1 \iff |x - 1| = x - 1 < \varepsilon)$$

Definimos $\delta = \varepsilon > 0$. Si $x \in D_f$ es tal que $0 \leq x - 1 < \delta$

$$\Rightarrow x > 1$$

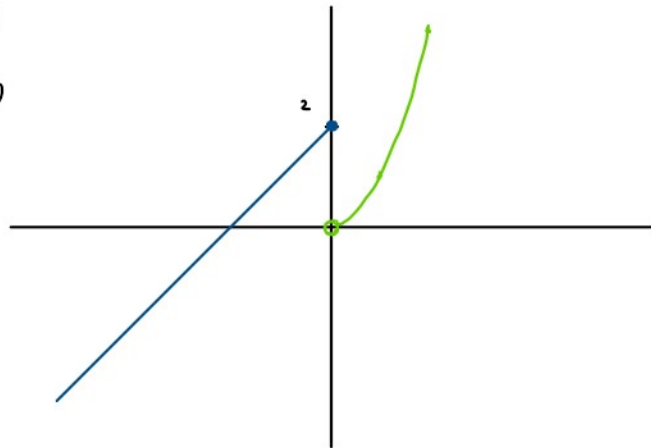
$$\Rightarrow |f(x) - 1| = |x - 1| = x - 1 < \delta = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

A partir de esto se prueba que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Ejemplo. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



~ Veamos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2$

Sea $\varepsilon > 0$

$$(|f(x) - 2| < \varepsilon, x \leq 0 \Leftrightarrow |(x+2) - 2| = -x < \varepsilon$$

Definimos $\delta = \varepsilon > 0$. Si $x \in D_g$ es t. q. $0 \leq 0 - x < \delta$

$$\Rightarrow x \leq 0$$

$$\Rightarrow |g(x) - 2| = |(x+2) - 2| = |x| = -x < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x) - 2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2$$

~ Veamos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$

Sea $\varepsilon > 0$

$$(|f(x) - 0| < \varepsilon, x > 0 \Leftrightarrow |x^2| = x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow x < \sqrt{\varepsilon})$$

Definimos $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Si $x \in D_g$ es t. q. $0 \leq x - 0 < \delta$

$$\Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow |g(x) - 0| = |x^2| = x^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x) - 0| = |x^2| = x^2 < \delta' = (\sqrt{\varepsilon})' = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

Se puede probar que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ no existe.

Teorema. Sean $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe

2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existen, y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Dem. 1 $\Rightarrow$ 2 Sean $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ p.a. $L \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in A \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

$\sim$ Sea $x \in A$ tal que $0 \leq a - x < \delta$

$$\Rightarrow |x - a| = a - x < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

$\sim$ Sea $x \in A$ tal que $0 \leq x - a < \delta$

$$\Rightarrow |x - a| = x - a < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

2 $\Rightarrow$ 1 Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ p.a. $L \in \mathbb{R}$, y sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, $\exists \delta_1 > 0 \forall x \in A \ (0 \leq a - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$, y

como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, $\exists \delta_2 > 0 \forall x \in A \ (0 \leq x - a < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

P.D. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Definimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, y sea $x \in A$ t.q. $|x - a| < \delta$

$$\sim \text{ si } x \leq a \Rightarrow 0 \leq a - x = |x - a| < \delta \leq \delta_1$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\sim \text{ si } x \geq a \Rightarrow 0 \leq x - a = |x - a| < \delta \leq \delta_2$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$