

Teorema. Sean $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$.

Entonces

1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = L_1 \cdot L_2$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c L_1$

4) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$

5) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

6) Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L_1^n$

7) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = L_1 - L_2$

Demostración

1), 2) ✓✓

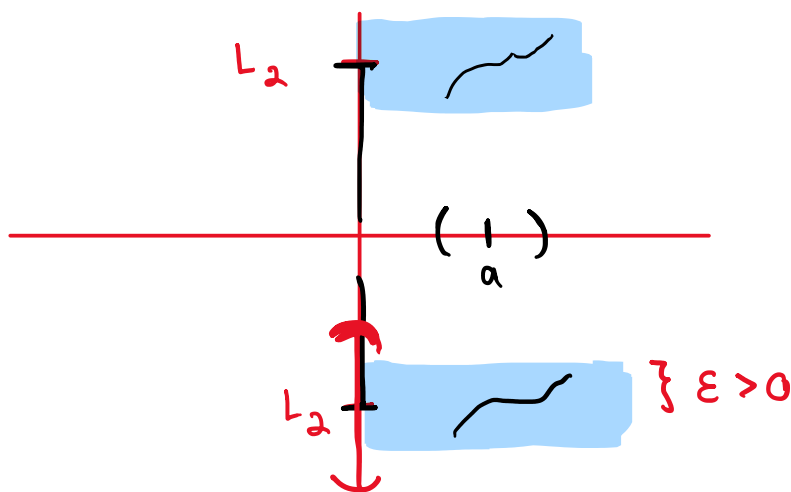
3) Caso particular de 2).

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = \left[\lim_{x \rightarrow a} c \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = c L_1$$

4)

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \neq 0$$

P.D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$



P.D. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_g (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$.

Me gustaría probar que $g(x) \neq 0$ si $0 < |x - a| < \delta$ (x se encuentra cerca de a).

Como $\frac{|L_2|}{2} > 0$ (porque $L_2 \neq 0$) y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $\forall x \in D_g$ ($0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$)

$$\Rightarrow \underbrace{|L_2| - |g(x)|} \leq |g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$$

$$\underbrace{|g(x)| - |L_2|} \leq$$

$$\Rightarrow |L_2| - |g(x)| < \frac{|L_2|}{2}$$

$$|L_2| - \frac{|L_2|}{2} = \frac{|L_2|}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|L_2|}{2} < |g(x)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|} \quad \text{si } 0 < |x-a| < \delta_1$$

Por otro lado, como $\frac{\varepsilon |L_2|^2}{2} > 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $\forall x \in D_g$ ($0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon \cdot |L_2|^2}{2}$)

Definimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \delta > 0$.

Sea $x \in D_g$ t.q. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1$ y $0 < |x-a| < \delta_2$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{g(x)L_2} \right| = \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|L_2|} \cdot \underbrace{|L_2 - g(x)|}$$

$$< \frac{2}{|L_2|} \cdot \frac{1}{|L_2|} \cdot \frac{\varepsilon |L_2|^2}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

2) 4)

6) Ejercicio (por inducción usando 2)).

7) Ejercicio.

Ejemplos:

- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$. Definimos $\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta > 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$.

- $\lim_{x \rightarrow a} 2x^2 + 3x - 8 = \lim_{x \rightarrow a} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 3x - \lim_{x \rightarrow a} 8$

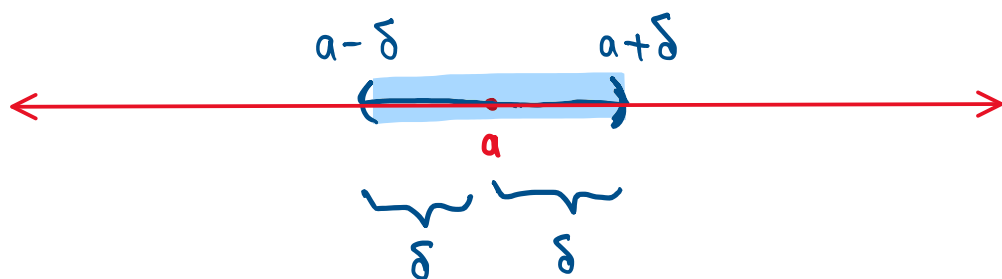
$$= 2 \lim_{x \rightarrow a} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow a} x - \lim_{x \rightarrow a} 8$$

$$= 2a^2 + 3a - 8$$

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^4 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^2 - 5x + 1}{\lim_{x \rightarrow a} x^4 + 5} = \dots = \frac{a^2 - 5a + 1}{a^4 + 5}$

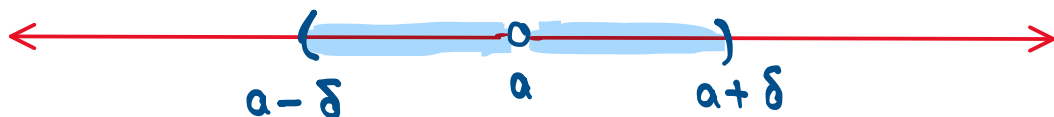
Definición. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Definimos la vecindad de radio δ alrededor de a (o con centro en a) como

$$V_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$



Definimos también la vecindad agujerada de radio δ alrededor de a (o con centro en a) como

$$V_\delta^\circ(a) = V_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$



Observación. $x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow |x-a| < \delta$

$$x \in V_\delta^\circ(a) \Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta$$

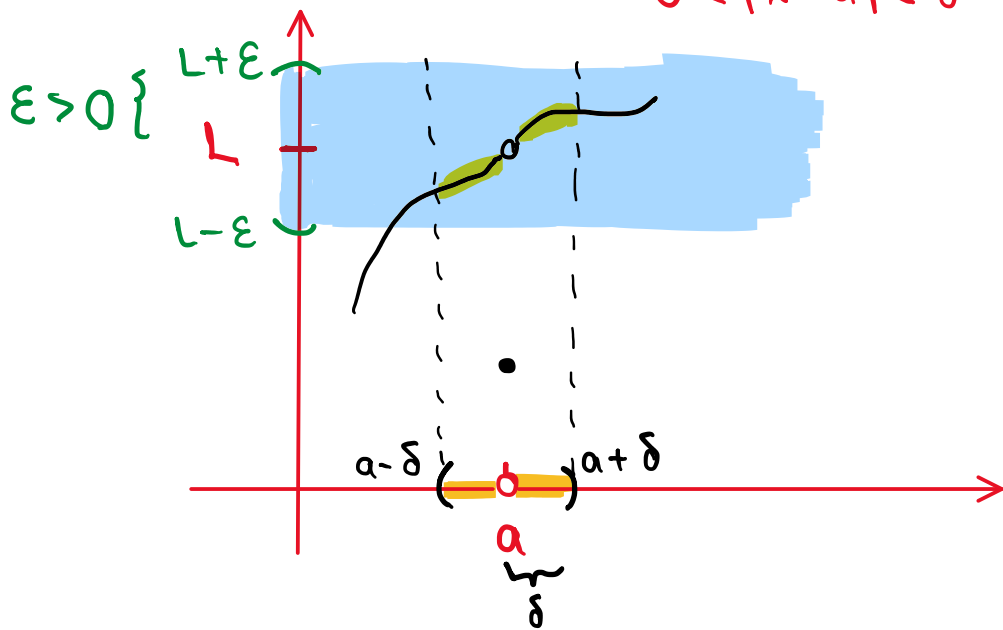
$$x \in V_\delta(a) \Leftrightarrow x \in (a-\delta, a+\delta) \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta \Leftrightarrow |x-a| < \delta.$$

$$x \in V_\delta^\circ(a) \Leftrightarrow x \in V_\delta(a) \wedge x \neq a \Leftrightarrow |x-a| < \delta \wedge x \neq a \Leftrightarrow 0 < |x-a| < \delta.$$

Nota. $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_F \left(x \in V_\delta^\circ(a) \Rightarrow F(x) \in V_\varepsilon(L) \right)$$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x)-L| < \varepsilon$$



Teorema Sean $F, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$.

1) Si existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in V_\delta(a) \cap A$ $F(x) > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} F(x) > 0$.

2) Si existe $\delta > 0$ $\forall x \in V_\delta(a) \cap A$ $F(x) \leq g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Demostración.

1) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L_1 < 0$.

$$\text{Sea } \varepsilon = |L_1| = -L_1 > 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L_1$, entonces existe

$\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall x \in A \quad (0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |F(x) - L_1| < -L_1)$$

$$\Rightarrow L_1 < F(x) - L_1 < -L_1$$

$$\Rightarrow 2L_1 < \underline{F(x)} < 0)$$

Sea $\delta_* = \min \{ \delta, \delta_1 \} \Rightarrow \delta_* > 0$.

Además, para toda $x \in A$, si $0 < |x - a| < \delta_* \Rightarrow$

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$F(x) > 0$$

$\Rightarrow$

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

$$F(x) < 0 \quad !$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} F(x) \not\geq 0.$$

2) Si existe $\delta > 0 \quad \forall x \in V_\delta^0(a) \cap A \quad F(x) \leq g(x)$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

$$0 \leq g(x) - F(x)$$

Sea $h = g - F$. Como

$$\forall x \in V_\delta^0(a) \cap A \quad \underline{h(x) = g(x) - F(x)} \geq 0,$$

usando 1) tenemos que

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

