- $\lim_{x \to a} F(x) = L$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_F \ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon)$

- $0 < |x-a| \iff x \neq a$

- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Demostración

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_F \ (0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$

Definimos $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\} \Rightarrow \delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$

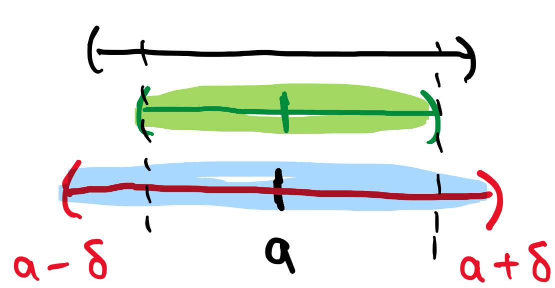
Sea $x \in D_F$ tal que $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < 1$ y $\boxed{|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}}$

Como $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \xRightarrow[+4]{} 3 < x+2 < 5 \Rightarrow |x+2| = x+2 < 5$

$\Rightarrow \boxed{|x+2| < 5}$

$\Rightarrow |x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2| < \frac{\varepsilon}{5}(5) = \varepsilon$

$\therefore \lim_{x \to 2} x^2 = 4$



• $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_f \ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$

Definimos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\} \Rightarrow \delta > 0$.

Además, $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{\varepsilon}{1+2|a|}$

Sea $x \in D_f$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < 1$ y $\boxed{|x-a| < \frac{\varepsilon}{1+2|a|}}$

Como $|x-a| < 1 \Rightarrow |x| - |a| \leq |x-a| < 1 \Rightarrow |x| - |a| < 1$

$\Rightarrow |x| < 1 + |a|$

$\Rightarrow |x+a| \leq |x| + |a| < 1 + |a| + |a|$

$\Rightarrow \boxed{|x+a| < 1 + 2|a|}$

$$\Rightarrow |x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| < \left(\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)(1+2|a|) = \varepsilon$$

$\therefore \lim_{x \to a} x^2 = a^2$

Otra Forma:

$*$ Definimos $\delta = \min\left\{3, \frac{\varepsilon}{3+2|a|}\right\}$

$|x-a| < 3 \Rightarrow |x| - |a| \leq |x-a| < 3 \Rightarrow |x| - |a| < 3$

$\Rightarrow |x| < 3 + |a|$

$\Rightarrow |x+a| \leq |x| + |a| < 3 + |a| + |a|$

$\Rightarrow |x+a| < 3 + 2|a|$

$$|x^2 - a^2| = |x-a| \cdot |x+a| < \left(\frac{\varepsilon}{3+2|a|}\right)(3+2|a|) = \varepsilon$$

Lema. Sean $x, a \in \mathbb{R}$. Si $|x-a| < L$, entonces $|x| < L + |a|$.

Demostración

Como $|x|-|a| \leq |x-a| < L \Rightarrow |x|-|a| < L \Rightarrow |x| < L+|a|$.

Ejercicio: demostrar que $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$

$$|x^3 - a^3| = |x-a| \cdot |x^2 + xa + a^2|$$

$$\begin{aligned} |x^2 + xa + a^2| &\leq |x^2| + |xa| + |a^2| \\ &= |x|^2 + |x| \cdot |a| + |a|^2 \\ &< (1+|a|)^2 + (1+|a|)^2 |a| + |a|^2 \end{aligned}$$

Teorema. Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$.

Entonces

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = L_1 + L_2$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = L_1 \cdot L_2$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} c f(x) = c L_1$

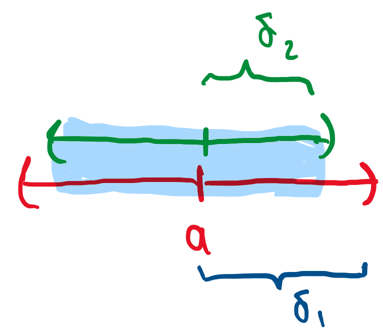
4) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$

5) Si $L_2 \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

6) Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L_1^n$

Demostración.

1) $\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$.



Sea $\varepsilon > 0$

P.D. $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D_{f+g}\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)\right| < \varepsilon\right)$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$\forall\, x \in D_f\ \left(0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ y $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que

$\forall\, x \in D_g\ \left(0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Definimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \delta > 0$. Además, $\delta \le \delta_1$ y $\delta \le \delta_2$.

Sea $x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$ tal que $0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1$ y $0 < |x-a| < \delta_2$

$\Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)\right| = \left|(f(x)-L_1) + (g(x)-L_2)\right|$$

$$\le |f(x)-L_1| + |g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x)+g(x) = L_1 + L_2$$

2) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = L_1 L_2$

P.D. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D_{f \cdot g}\ \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - L_1 L_2| < \varepsilon\right)$

Sea $\varepsilon > 0$.

$|f(x) - L_1| < \varepsilon$ $\quad |g(x) - L_2| < \varepsilon$

(*) Si $|g(x)-L_2|<1 \Rightarrow |g(x)|-|L_2| \leq |g(x)-L_2| < 1$

$\Rightarrow |g(x)| < 1+|L_2|$

- Como $\lim_{x\to a} F(x) = L_1$ y $\dfrac{\varepsilon}{2(1+|L_2|)} > 0$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$\forall\ x \in D_F \left(0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |F(x)-L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|L_2|)}\right)$. (1)

- Por otro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ y $1>0$, entonces existe $\delta_2 > 0$ t.q.

$\forall\ x \in D_g \ (0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-L_2| < 1$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} |g(x)| < 1+|L_2|\ )$ (2)

- Usando nuevamente que $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, como $\dfrac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)} > 0$, entonces existe $\delta_3 > 0$ t.q.

$\forall\ x \in D_g \left(0<|x-a|<\delta_3 \Rightarrow |g(x)-L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)}\right)$. (3)

Definimos ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \Rightarrow \delta > 0$ y además $\delta \leq \delta_1$, $\delta \leq \delta_2$ y $\delta \leq \delta_3$.

Sea $x \in D_{Fg} = D_F \cap D_g$ t.q. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1, \delta_2, \delta_3$

$\Rightarrow$ se cumplen las desigualdades (1), (2) y (3).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |F(x)g(x) - L_1L_2| &= |F(x)g(x) - L_1 g(x) + L_1 g(x) - L_1 L_2| \\
&= |g(x)(F(x)-L_1) + L_1(g(x)-L_2)| \\
&\leq |g(x)| \cdot |F(x)-L_1| + |L_1| \cdot |g(x)-L_2| \\
&< (1+|L_2|)\left(\frac{\varepsilon}{2(1+|L_2|)}\right) + (|L_1|+1)\left(\frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{x\to a} F(x)g(x) = L_1 L_2$.