

Sucesiones de Cauchy y límites de funciones

jueves, 25 de noviembre de 2021

Ejercicio. A partir de la definición, muestra que las siguientes sucesiones son de Cauchy

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; 2) $\left(\frac{n+3}{3n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ 3) $\left(\frac{(-1)^n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N (|a_m - a_n| < \varepsilon)$

Sol 1) Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{4}{\varepsilon^2} < n \right)$$

Por propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4}{\varepsilon^2} < N \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean $m, n > N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right| &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{m}} \right| + \left| -\frac{1}{\sqrt{n}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \quad \text{p.c. } m, n > N$$

$\therefore \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy

2) $\left(\frac{n+3}{3n+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Notamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}^1 + \cancel{3}^0}{\cancel{3n}^0 + \cancel{2}^0} = \frac{1}{3}$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{n+3}{3n+2} \rightarrow \frac{1}{3}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{n+3}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{p.c. } n \geq N. \quad (*)$$

Sean $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{m+3}{3m+2} - \frac{n+3}{3n+2} \right| &\leq \left| \left(\frac{m+3}{3m+2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{n+3}{3n+2} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{m+3}{3m+2} - \frac{1}{3} \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{n+3}{3n+2} \right| \\ &\stackrel{*}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{m+3}{3m+2} - \frac{n+3}{3n+2} \right| < \varepsilon \quad \text{p.c. } m, n \geq N$$

$\therefore \left(\frac{n+3}{3n+2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

3) $\left(\frac{(-1)^n}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \right)$ no es de Cauchy

P.D. $\neg [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N (|a_n - a_m| < \varepsilon)]$

P.D. $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists m, n \geq N (|a_m - a_n| \geq \varepsilon)$

Sean $\varepsilon_0 = 1 > 0$ y $N \in \mathbb{N}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que N es par

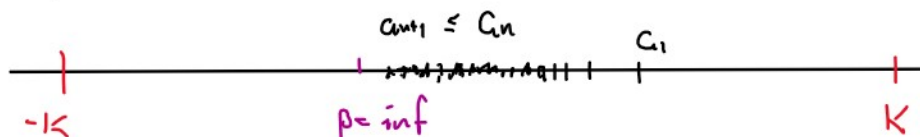
$\Rightarrow N+1$ es impar

$$\Rightarrow \left| \frac{(-1)^N}{2} - \frac{(-1)^{N+1}}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = 1 \geq \varepsilon_0,$$

con $N, N+1 \geq N$

$\therefore \left(\frac{(-1)^n}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

Ejercicio. Demuestre directamente que una sucesión decreciente y acotada es de Cauchy.



Sol. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada en $\mathbb{R}$.

Como $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente, existe

$$\beta = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow \beta \quad (\text{teorema de la sucesión monótona})$$

Ya que β es una cota inferior, $\beta \leq a_n$ p.c. $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_n - \beta \geq 0 \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

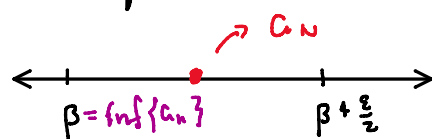
Sea $\varepsilon > 0$.

$$\text{P.D. } \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad (|a_m - a_n| < \varepsilon)$$

Como $\beta = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_N < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow a_N - \beta < \frac{\varepsilon}{2}$$



Sean $m, n \geq N$

$$\Rightarrow a_m \leq a_N \quad \text{y} \quad a_n \leq a_N \quad (a_n)_{n \geq N} \text{ es decreciente}$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |(a_m - \beta) + (\beta - a_n)|$$

$$\leq |a_m - \beta| + |\beta - a_n|$$

$$\stackrel{(1)}{=} (a_m - \beta) + (a_n - \beta)$$

$$\leq (a_N - \beta) + (a_N - \beta)$$

$$\stackrel{(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{p.c. } m, n \geq N$$

$\therefore (a_n)_{n \geq N}$ es de Cauchy y

Ejercicio. Muestra que si una sucesión tiene límite, este es único.

Sol. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_n \rightarrow a \quad \text{y} \quad a_n \rightarrow b$$

$$P.D. \quad a=b$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow a$ y $a_n \rightarrow b$, existen $N, M \in \mathbb{N}$ t. q.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ p. c. } n \geq N \quad \text{y} \quad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ p. c. } n \geq M$$

Consideremos $n = \max\{N, M\}$

$$\Rightarrow n \geq N \quad \text{y} \quad n \geq M$$

$$\Rightarrow |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)|$$

$$\leq |a - a_n| + |a_n - b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a - b| < \varepsilon \quad \text{p. c. } \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow |a - b| = 0$$

Teorema visto en clase

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

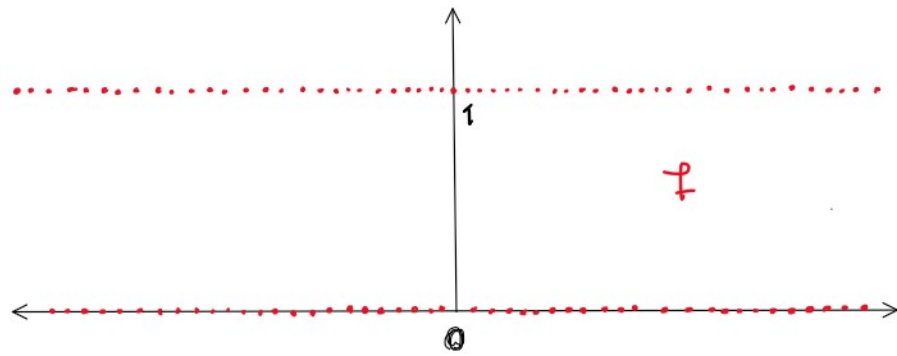
$\therefore$ El límite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es único $\square$

Ejercicio. Muestra que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, este es único.

Dem. Tarea $\square$

Ejercicio. Prueba que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe para ninguna $a \in \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



donde queremos calcular
el límite

propuesta de límite

Sol. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$

$$\text{P.D. } \neg [\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)]$$

$$\text{P.D. } \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D_f (|x-a| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \varepsilon)$$

Caso 1. $L = 0$

Sea $\varepsilon_0 = 1 > 0$ y sea $\delta > 0$.

Por densidad de $\mathbb{Q}$, existe $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ y } a-\delta < x < a+\delta$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ y } -\delta < x-a < \delta$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q} \text{ y } |x-a| < \delta$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Q} \subset D_f, |x-a| < \delta \text{ y } |f(x)-L| = |1-0| = 1 \geq \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow |x-a| < \delta \text{ y } |f(x)-L| \geq \varepsilon_0$$

Caso 2. $L \neq 0$

Sea $\varepsilon_0 = \frac{|L|}{2} > 0$ y sea $\delta > 0$

Por densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ y } |x-a| < \delta$$

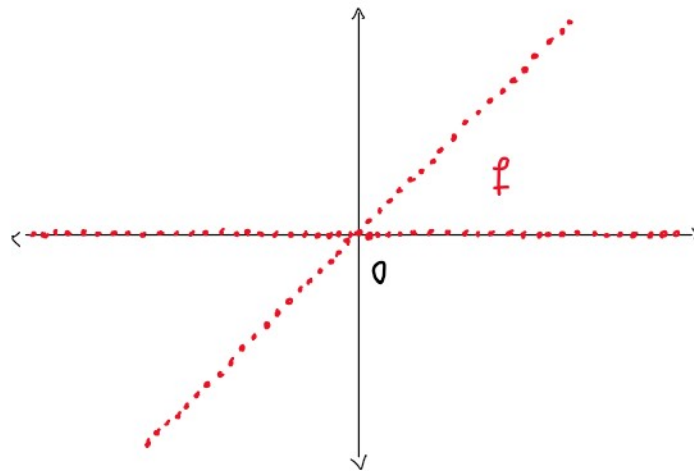
$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset D_f, |x-a| < \delta \text{ y } |f(x)-L| = |0-L| = |L| = 2\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow |x-a| < \delta \text{ y } |f(x)-L| \geq \varepsilon_0$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe $\square$

Ejercicio. Demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



δ depende de ε

Sol. P. D. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f (|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon)$

Sea $\varepsilon > 0$ y definimos $\delta = \varepsilon > 0$.

Consideramos $x \in \mathbb{R} = D_f$ tal que $|x| = |x - 0| < \delta$

Caso 1. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon \quad \checkmark$$

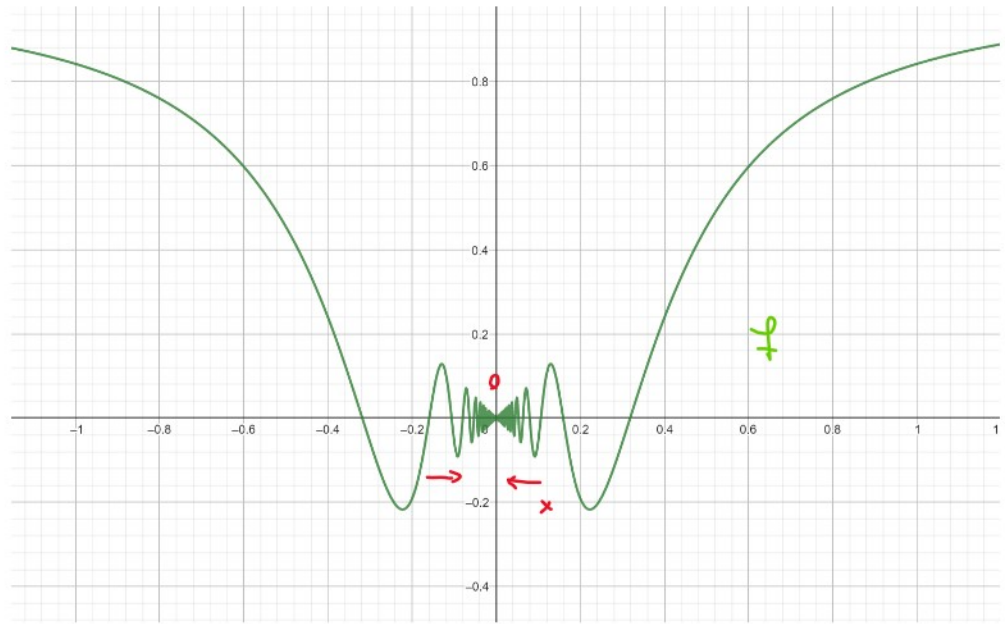
Caso 2. $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \square$

Ejercicio. Determina $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ si $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Sol. Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\left[\begin{aligned} |f(x) - 0| &= \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x| \cdot 1 \\ &= |x| < \delta \end{aligned} \right.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y definimos $\delta = \varepsilon > 0$.

Consideremos $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = D_f$ tal que $|x| = |x - 0| < \delta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x) - 0| &= \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \\ &\leq |x| \cdot 1 \\ &= |x| \\ &< \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

$$|\sin(y)| \leq 1 \quad \text{p. c. } y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$