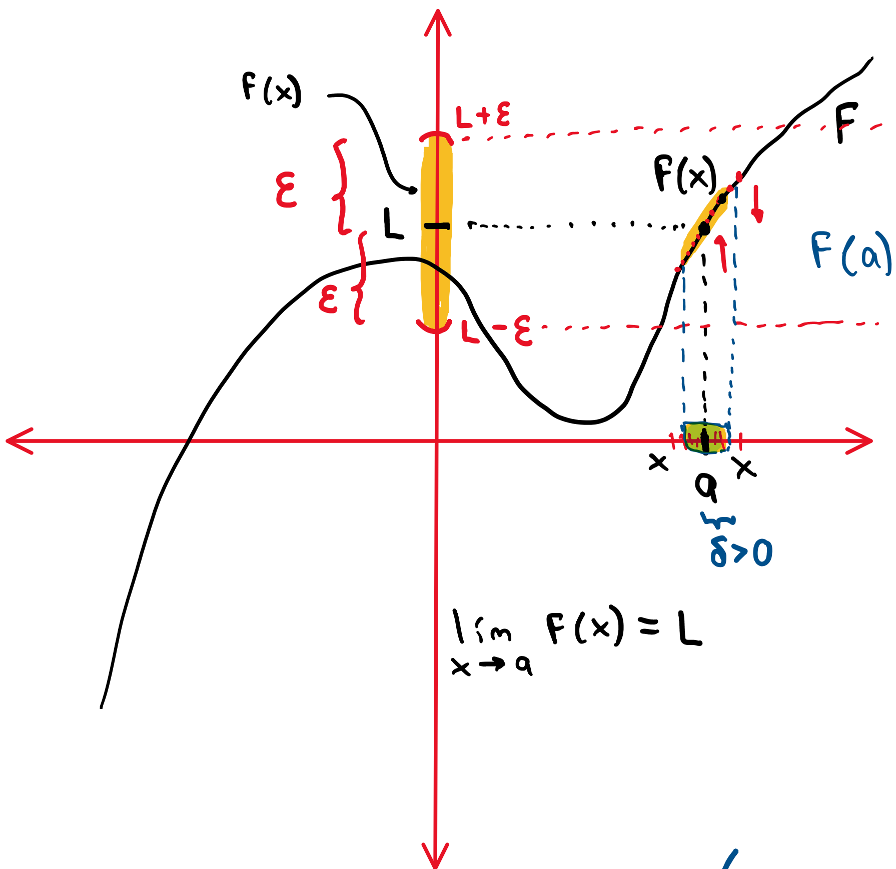
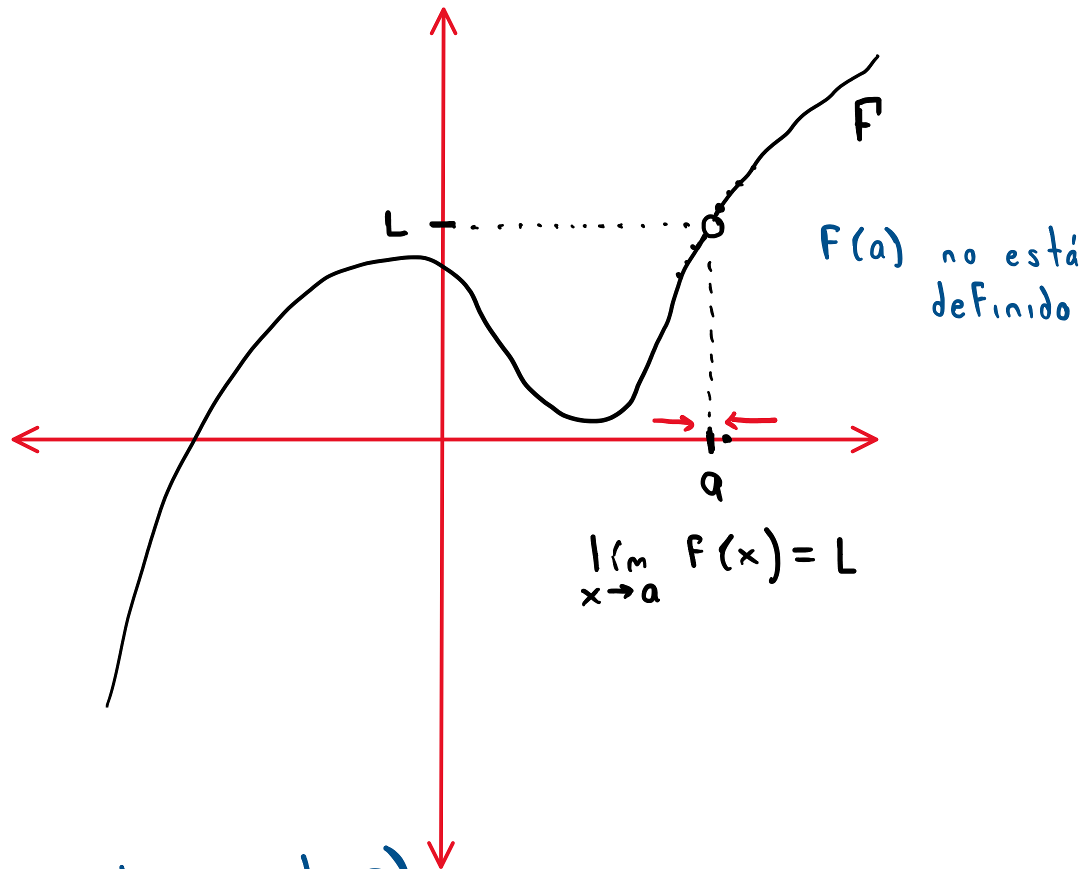
Límites de funciones

miércoles, 24 de noviembre de 2021

$$\lim_{x \to a} F(x)$$

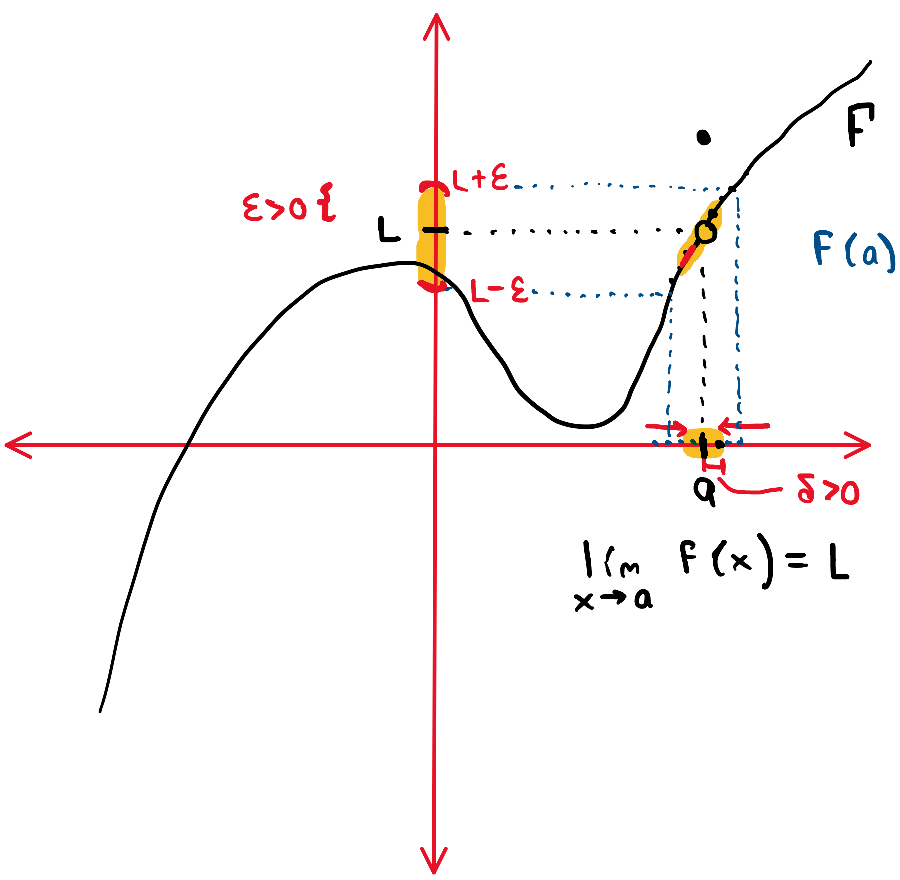
Si x es cercano a a, pero $x \neq a$, ¿Adónde se aproximan los valores de $F(x)$?

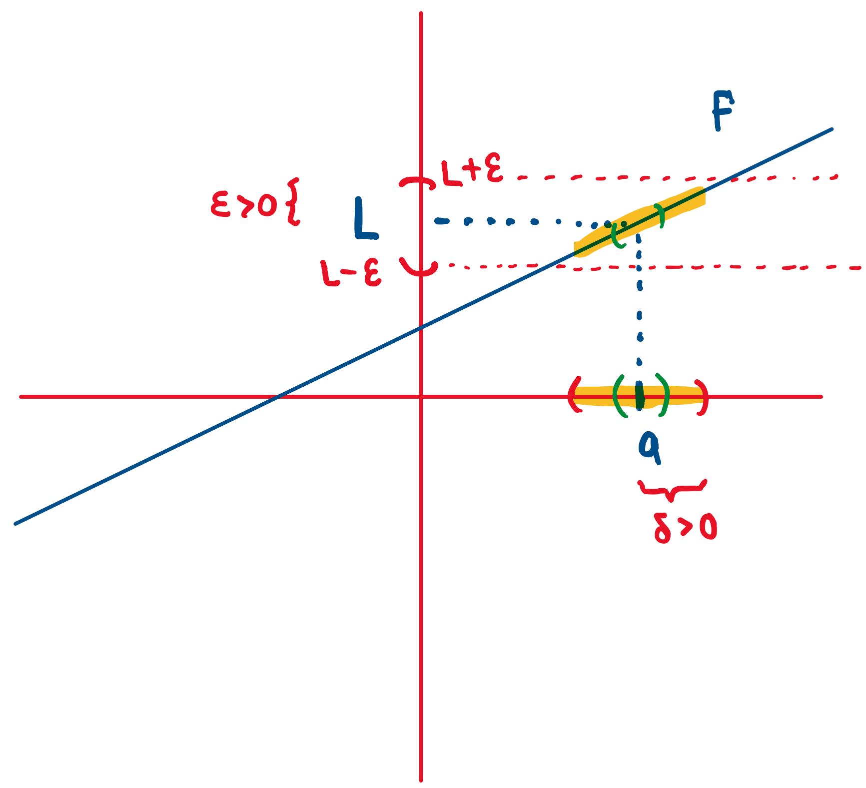


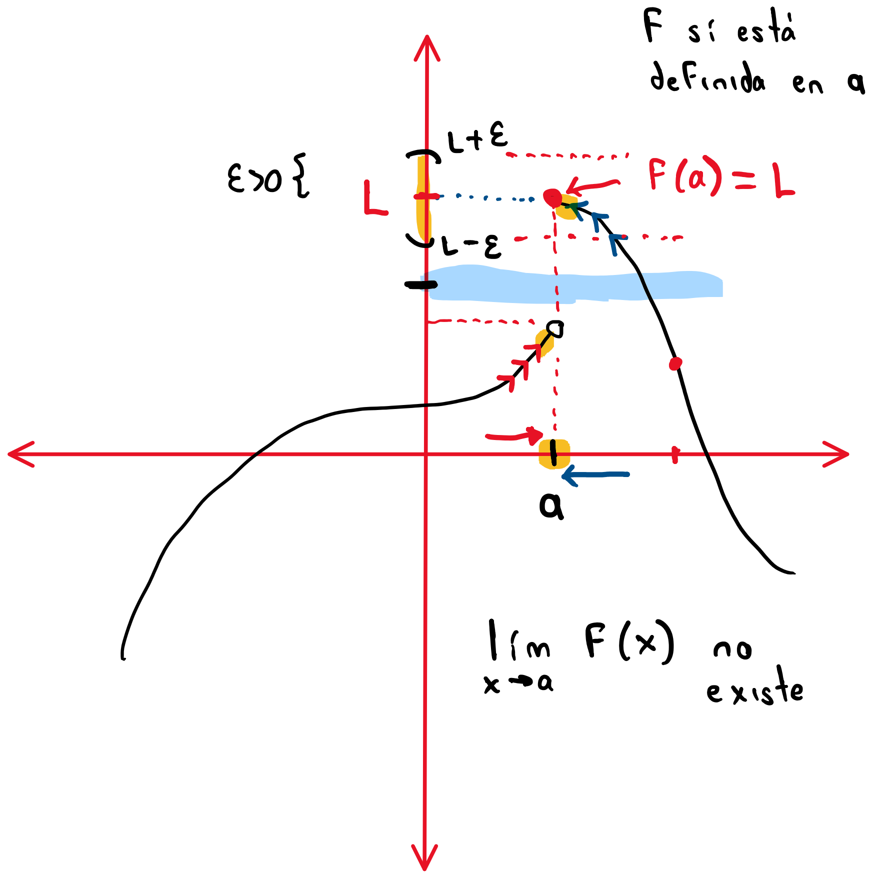


$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_F \; \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon \right)$$

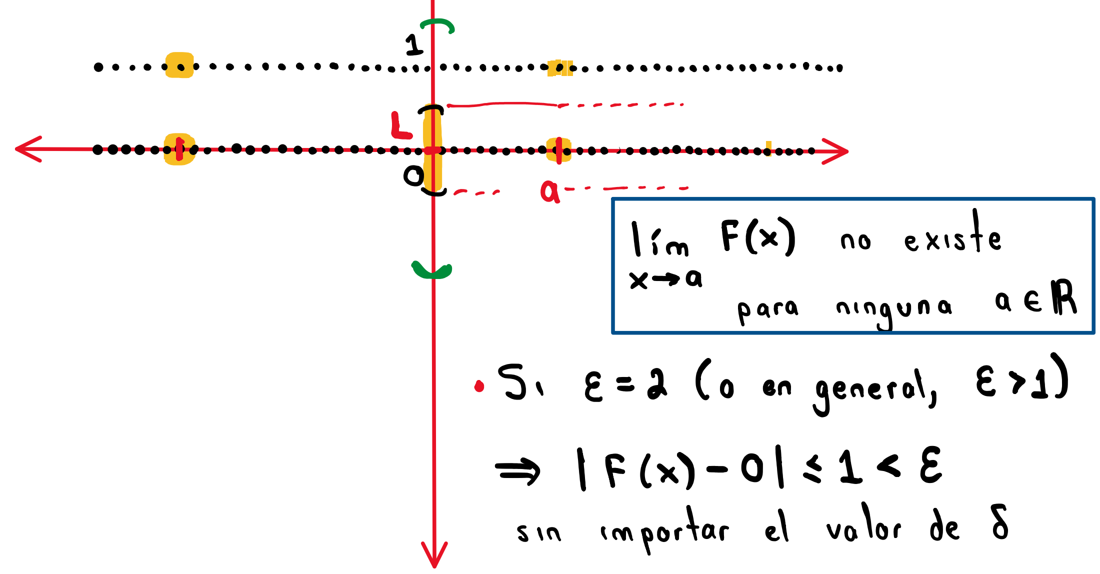
$x \neq a$







$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

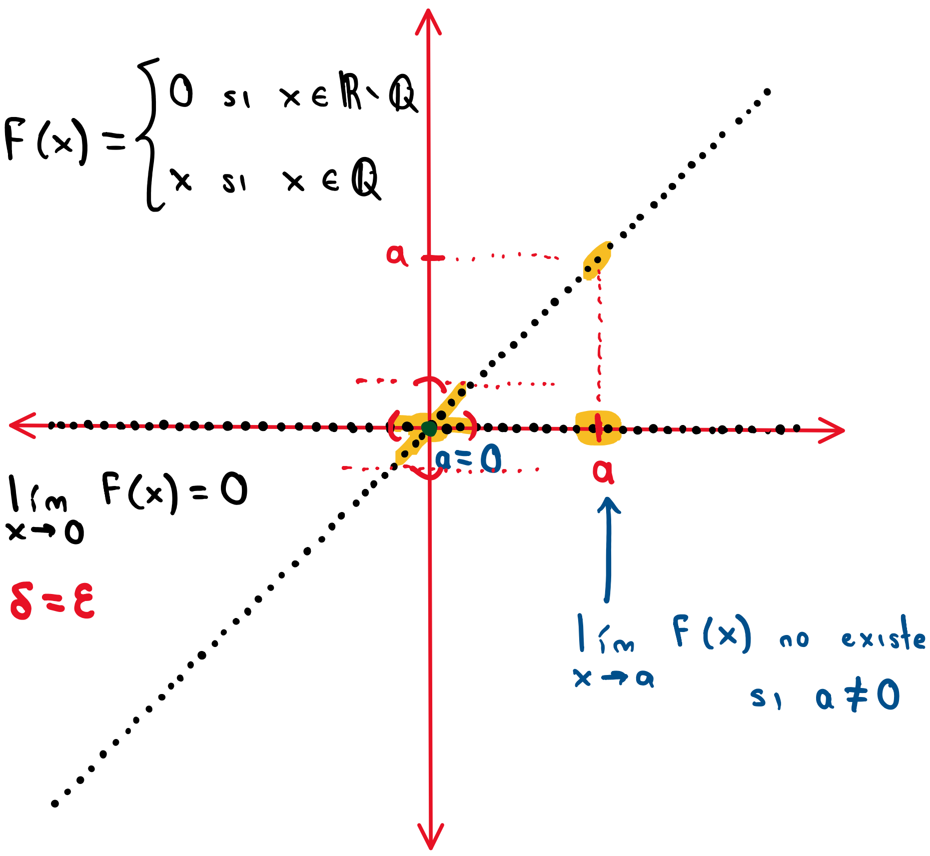


• Si $\varepsilon = 2$ (o en general, $\varepsilon > 1$)

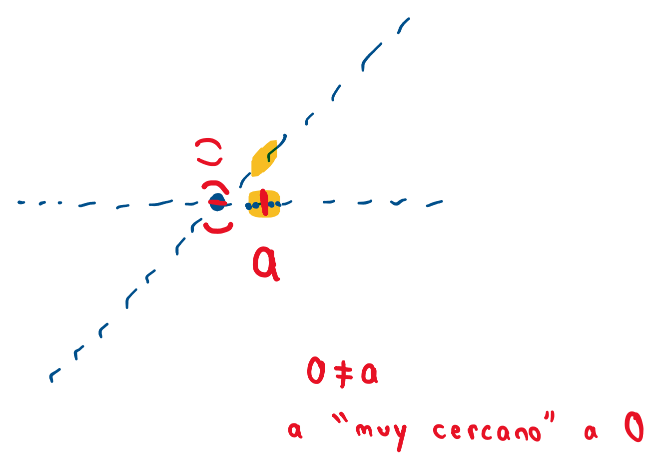
$\Rightarrow |F(x) - 0| \leq 1 < \varepsilon$

sin importar el valor de δ

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$



Def. $\forall\, \varepsilon > 0 \ldots$



Definición. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que "F tiende hacia el límite L en a", que "F(x) tiende a L cuando x tiende a a" o que "el límite de F(x) cuando x tiende a a es L" si:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D_F\ \big(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - L| < \varepsilon\big)$$

Notación: $\boxed{\lim_{x \to a} F(x) = L}$ $\qquad D_F = \mathrm{Dom}(F)$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 5} 3x-2 = 13 \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Demostración:

- P.D. $\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta>0 \;\; \forall\, x\in D_f \; \left(0<|x-5|<\delta \Rightarrow |3x-2-13|<\varepsilon\right)$

Sea $\varepsilon>0$.

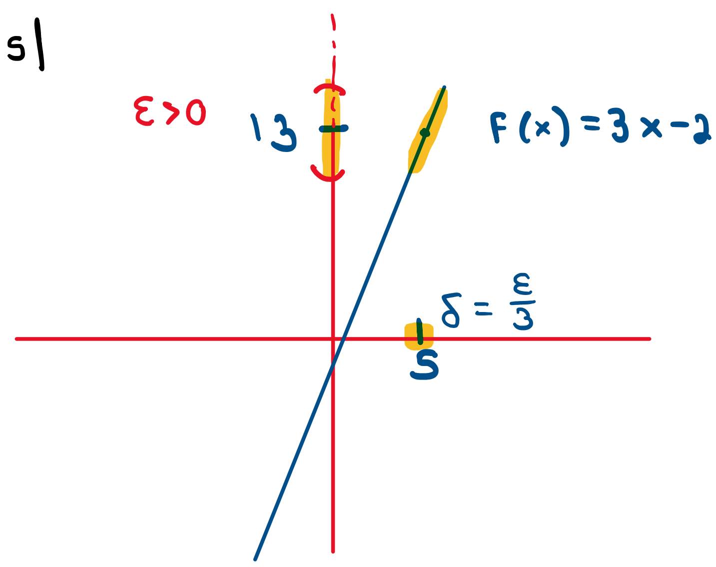
Definimos $\delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \delta>0$ (porque $\varepsilon>0$ y $3>0$).

Sea $x\in D_f$ tal que $0<|x-5|<\delta \Rightarrow \boxed{|x-5|<\frac{\varepsilon}{3}}$ $(*)$

P.D. $|(3x-2)-13|<\varepsilon$

$$\Rightarrow |(3x-2)-13| = |3x-15| = |3(x-5)| = |3|\cdot|x-5|$$
$$= 3|x-5|$$
$$\underset{(*)}{<} 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to 5} 3x-2 = 13$$



- $\lim_{x\to -4} -2x-9 = -1$

P.D. $\forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta>0 \;\; \forall\, x\in D_f \; \left(0<|x-(-4)|<\delta \Rightarrow |(-2x-9)-(-1)|<\varepsilon\right)$

$|x+4|<\delta \qquad |-2x-8|<\varepsilon$

Sea $\varepsilon>0$.

Definimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta>0$.

Sea $x\in D_f$ t.q. $0<|x-(-4)|<\delta \Rightarrow \boxed{|x+4|<\frac{\varepsilon}{2}}$ $(*)$

$$\Rightarrow |(-2x-9)-(-1)| = |-2x-8| = |(-2)(x+4)|$$
$$= 2|x+4| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to -4} -2x-9 = -1.$$

- Sean $m, b \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$. Entonces para toda $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \; \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|(mx+b) - (ma+b)\right| < \varepsilon\right)$

Sea $\varepsilon > 0$.

Definimos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$. Notemos que como $m \neq 0 \Rightarrow |m| > 0 \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|} > 0$.

Sea $x \in D_f$ tal que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \boxed{|x-a| < \dfrac{\varepsilon}{|m|}}$ $(*)$

$$\Rightarrow \left|(mx+b) - (ma+b)\right| = |mx + b - ma - b| = |mx - ma| = |m(x-a)|$$

$$= |m| \cdot \underbrace{|x-a|}_{(*)} < |m| \cdot \left(\frac{\varepsilon}{|m|}\right) = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to a} mx + b = ma + b.$$

- Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \; \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |c - c| < \varepsilon\right)$

$|0| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$.

Definimos $\delta = 857 \Rightarrow \delta > 0$ (cualquier $\delta > 0$ Funciona)

Sea $x \in D_f$ tal que $0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

$$\therefore \lim_{x \to a} c = c.$$