

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} - n = 0$.

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| < \varepsilon)$$

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{n^2+1} - n - 0| &= \left| (\sqrt{n^2+1} - n) \left(\frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} \right) \right| = \left| \frac{n^2+1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}. \end{aligned}$$

$$\text{Adem\u00e1s, como } 0 \leq \sqrt{n^2+1} \Rightarrow 0 < n \leq \sqrt{n^2+1} + n \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\sqrt{n^2+1} - n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \leq \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}. (*)}$$

$$\text{Sea } \varepsilon > 0. \quad \text{P.D. } \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| < \varepsilon)$$

$$\text{Como } \varepsilon \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}.$$

Por la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < N$.

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow n \geq N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} - n = 0$$

Otra Forma de concluir:

Por un corolario de la propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{n^2+1} - n - 0| < \varepsilon \quad (*)$$