

Definición. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L o que L es el límite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

Esto lo denotaremos escribiendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{4n-11} = -\frac{3}{4}$

Idea intuitiva:

Si n es muy grande, entonces $\frac{-3n+2}{4n-11} \approx \frac{-3n}{4n} = -\frac{3}{4}$.

Por ejemplo, si $n = 1\,000\,000$, entonces $\frac{-3(1\,000\,000)+2}{4(1\,000\,000)-11} \approx \frac{-3(1\,000\,000)}{4(1\,000\,000)} = -\frac{3}{4}$.

P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{4n-11} = -\frac{3}{4}$

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geq N \Rightarrow \left| \overbrace{\frac{-3n+2}{4n-11}}^{a_n} - \overbrace{\left(-\frac{3}{4}\right)}^L \right| < \varepsilon \right)$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geq N \Rightarrow \left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| < \varepsilon \right)$

Notemos que si $n \geq 3 \Rightarrow 4n \geq 12 \Rightarrow 4n-11 \geq 1 > 0 \Rightarrow 4n-11 > 0$ ($\square$)

$\Rightarrow 4(4n-11) > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| &= \left| \frac{-3n+2}{4n-11} + \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{4(-3n+2) + 3(4n-11)}{4(4n-11)} \right| \\ &= \left| \frac{-12n+8+12n-33}{4(4n-11)} \right| = \left| \frac{-25}{4(4n-11)} \right| = \frac{|-25|}{|4(4n-11)|} = \frac{25}{4(4n-11)} \end{aligned}$$

$\therefore$ Si $n \geq 3$, entonces $\left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| = \frac{25}{4(4n-11)}$. (Δ)

$\uparrow$ si $n \geq 3$

Idea: Queremos que $n \in \mathbb{N}$ cumpla que $\frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon$.

a partir de algún $N \in \mathbb{N}$ (para toda $n \geq N$).

Vamos a despejar n :

$$\frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{25}{4\varepsilon} < 4n-11 \Leftrightarrow \frac{25}{4\varepsilon} + 11 < 4n$$

si $4n-11 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) < n$$

Podemos aplicar la propiedad arquimediana al número $\frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right)$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) \in \mathbb{R}$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) < N_1 \quad (*)$$

Definimos $N = \max \{N_1, 3\} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$ y $N \geq 3$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq 3$.

Como $n \geq N_1$ debido a $(*)$ tenemos que

$$\frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) < n \Rightarrow \frac{25}{4\varepsilon} + 11 < 4n \Rightarrow \frac{25}{4\varepsilon} < 4n - 11 \Rightarrow \frac{25}{4} < (4n - 11)\varepsilon$$

Además, dado que $n \geq 3 \Rightarrow 4n - 11 > 0 \Rightarrow \frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon$. $(\square)$

Finalmente, usando (Δ) deducimos que

$$\left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right| = \frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{4n-11} = -\frac{3}{4}.$$

Demostración "resumida":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{4n-11} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geq N \Rightarrow \left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right| < \varepsilon \right)$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Notemos que si $n \geq 3 \Rightarrow 4n \geq 12 \Rightarrow 4n-11 \geq 1 > 0 \Rightarrow 4n-11 > 0$ ($\square$)

$$\Rightarrow 4(4n-11) > 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right| = \left| \frac{-3n+2}{4n-11} + \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{-12n+8+12n-33}{4(4n-11)} \right|$$

$$= \left| \frac{-25}{4(4n-11)} \right| = \frac{|-25|}{|4(4n-11)|} = \frac{25}{4(4n-11)}$$

$$\therefore \text{ Si } n \geq 3, \text{ entonces } \left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right| = \frac{25}{4(4n-11)}. \quad (\Delta)$$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) \in \mathbb{R}$. Por la propiedad arquimediana, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) < N_1 \quad (*)$$

Definimos $N = \max \{N_1, 3\} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$ y $N \geq 3$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq 3$.

Como $n \geq N_1$ debido a $(*)$ tenemos que

$$\frac{1}{4} \left(\frac{25}{4\varepsilon} + 11 \right) < n \Rightarrow \frac{25}{4\varepsilon} + 11 < 4n \Rightarrow \frac{25}{4\varepsilon} < 4n-11 \Rightarrow \frac{25}{4} < (4n-11)\varepsilon$$

Además, dado que $n \geq 3 \Rightarrow 4n-11 > 0 \Rightarrow \frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon$. ($\square$)

Finalmente, usando (Δ) deducimos que

$$\left| \frac{-3n+2}{4n-11} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right| = \frac{25}{4(4n-11)} < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{4n-11} = -\frac{3}{4}.$$