

El número e

martes, 23 de noviembre de 2021

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ^{acotada} en $\mathbb{R}$ tal que cada una de sus subsucesiones propias convergen a $a \in \mathbb{R}$, entonces $a_n \rightarrow a$.

Dem. Sea $M' > 0$ tal que $|a_n| \leq M'$ p.c. $n \in \mathbb{N}$

Supongamos por contradicción que $a_n \not\rightarrow a$. El criterio de la divergencia nos dice que existen $\varepsilon_0 > 0$ y $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

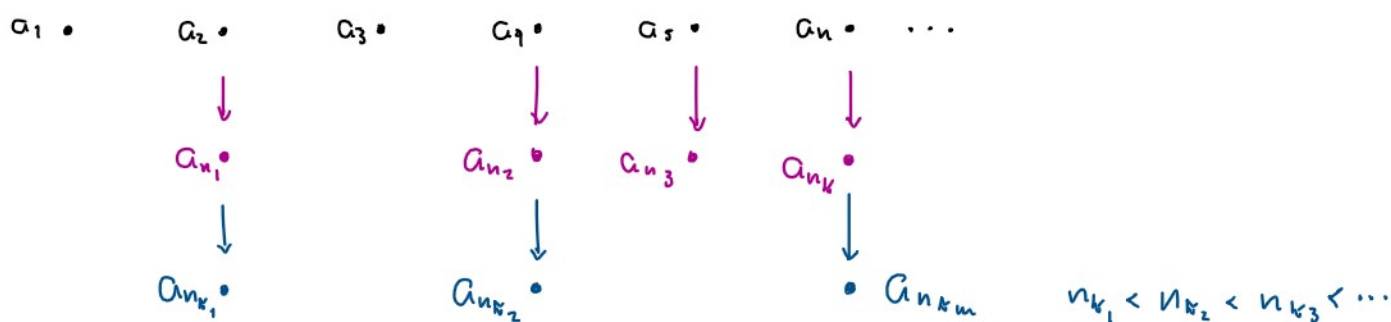
$$|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{p.c. } k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Como $\{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow |a_{n_k}| \leq M' \quad \text{p.c. } k \in \mathbb{N}.$$

Es decir, $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Por el Teorema Bolzano-Weierstrass, existe $(a_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.



$\Rightarrow (a_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\stackrel{\text{hip.}}{\Rightarrow} a_{n_{k_m}} \rightarrow a$$

Pero $\{a_{n_{k_m}} \mid m \in \mathbb{N}\} \subset \{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_{n_{k_m}} - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{p.c. } m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n_{k_m}} \not\rightarrow a \quad \text{!}$$

$$\therefore a_n \rightarrow a$$

El número e

Algunos conceptos y resultados previos:

~ Si $n, k \in \mathbb{N}$ y $n \geq k$, entonces definimos el coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

~ Teorema del binomio de Newton.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

~ $2^{n-1} \leq n!$ p.c. $n \in \mathbb{N}$ (Ejercicio)

~ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ p.c. $n \in \mathbb{N}$ (Ejercicio)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Por ejemplo:

$$\sim e_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$$

$$\sim e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

$$\sim e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27}$$

Notemos que $2 = e_1 < e_2 < e_3$

Lema 1. La sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

Dem. (P.D. $e_n < e_{n+1}$ p.c. $n \in \mathbb{N}$)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema del binomio, tenemos que

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{n!}{n! \cdot 0!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{n \cdot n \cdot (n-2)!} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{n \cdot n \cdot n \cdot (n-3)!} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-(n-1)}{n}$$

Entonces

$$e_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Similarmente se prueba que

$$e_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Notamos que e_n tiene n sumandos, mientras que e_{n+1} tiene $n+1$ sumandos. Comparemos las segundas términos de e_n y e_{n+1} :

$$\Rightarrow n < n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}, \quad 2! > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

En general, cada sumando de e_n es menor o igual a su correspondiente en e_{n+1} , y este tiene uno más

$$\therefore e_n < e_{n+1} \quad \blacksquare$$

Lema 2. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.

Dem. Ya que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y $e_1 = 2$, entonces $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por 2.

$$(P.D. \quad e_n < 3 \quad p.c. \quad n \in \mathbb{N})$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $p \leq n$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{n} \leq 1 < 1 + \frac{p}{n}$$

$$\Rightarrow \underline{1 - \frac{p}{n} < 1} \quad (1)$$

También sabemos que $2^{p-1} \leq p!$

$$\Rightarrow \underline{\frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow e_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 2 + \frac{1}{2^{2-1}} \cdot \overset{(2)}{1} + \frac{1}{2^{3-1}} \cdot \overset{(1)}{1} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 2 + \underbrace{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$< 2 + 1$$

$$\Rightarrow e_n < 3 \quad p.c. \quad n \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

Hemos probado que $2 \leq e_n < 3 \quad p.c. \quad n \in \mathbb{N}$.

Ya que la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente (monótona) y está acotada, se sigue por un teorema visto en clase que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$. Definimos

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Observamos que $2 < e < 3$.

Nota: $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Ejercicio. Determina la convergencia de las siguientes sucesiones:

1) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

3) $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$

2) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Sol. 1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot 3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^3$ lo de adentro converge

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^3 \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^3 \\ &= e^3 \end{aligned}$$

2) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

ambos convergen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

$$3) \quad 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

Notamos que

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)_{n=2}^{\infty} = \left(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots\right) = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{e}$$