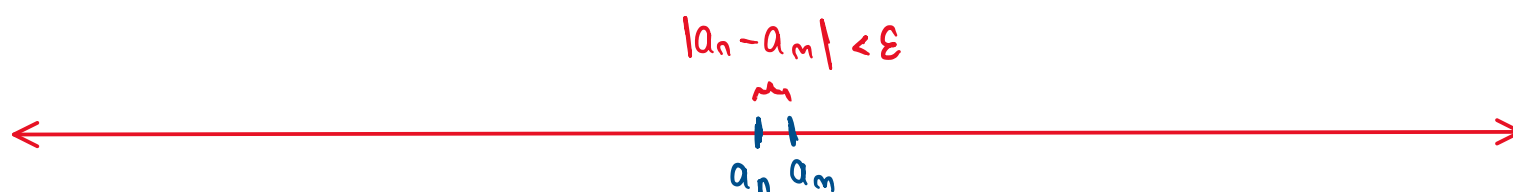


Sucesiones de Cauchy

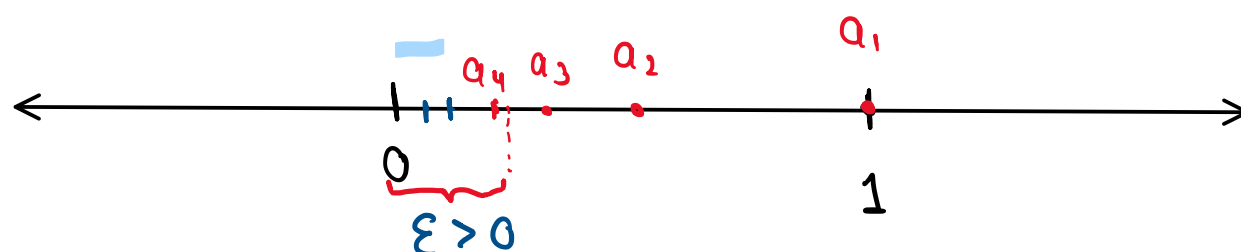
lunes, 22 de noviembre de 2021

Definición Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales es una sucesión de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$$



Ejemplo: $\bullet \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$
 $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy



Dem.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, por la P.A. existe $N \in \mathbb{N}$

tal que

$$\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Sean } n, m \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n, m \geq N \Rightarrow n \geq N \text{ y } m \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

desigualdad
del triángulo

$\therefore (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente de números reales, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración.

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. (P.D. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy).

$n, m \geq N$
 a_m



Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$:

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean $n, m \geq N$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m|$$

$$= |a_m - L|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Lema. ① Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ está acotada.

Demostración

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy.

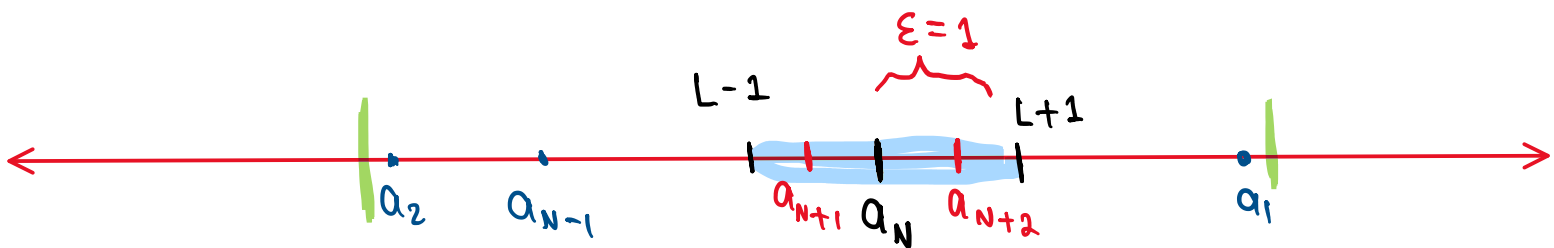
Sea $\varepsilon = 1$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y $\varepsilon = 1 > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < 1$$

En particular, si $n \geq N$, como $n, N \geq N$, entonces

$$|a_n| - |a_N| \leq |a_n - a_N| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| < 1 + |a_N| \text{ para toda } n \geq N.$$



Definimos $M = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N| \} \Rightarrow M \geq 1 + |a_N| \geq 1 > 0$
 $\Rightarrow M > 0$

P.D. $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$

Sea $n \in \mathbb{N}$.

Caso 1) Si $n < N \Rightarrow |a_n| \leq M$ (por definición de máximo)
 $n \leq N-1$

Caso 2) Si $n \geq N \Rightarrow |a_n| < 1 + |a_N| \leq M$

En cualquier caso, $|a_n| \leq M$.

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada

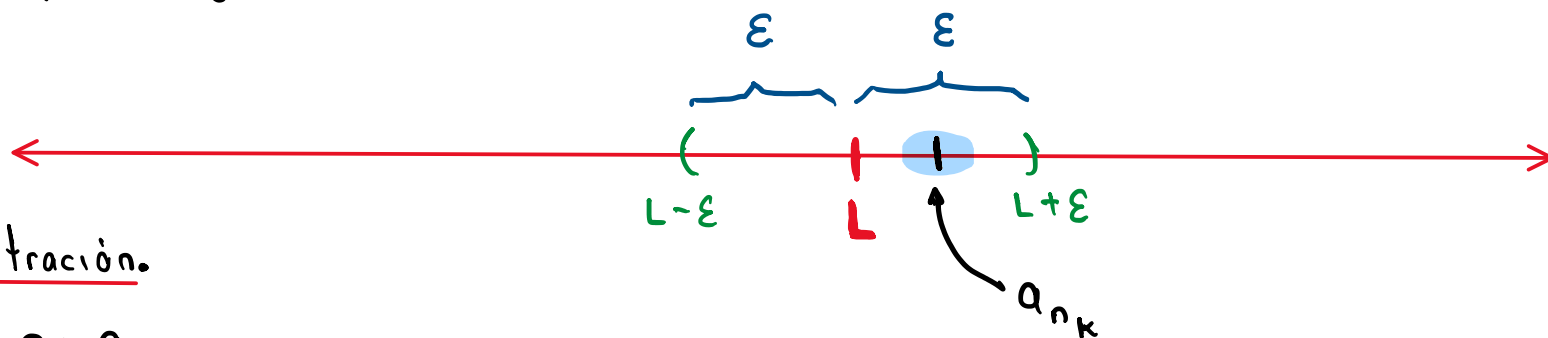
¿Cuándo usar $\varepsilon > 0$ o $\varepsilon = 1$?

$\left\{ \begin{array}{l} \text{P.D. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge o P.D. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy} \\ \text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \dots \\ \text{Dem. Sea } \varepsilon > 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si ya sé que } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge o } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es de Cauchy (hipótesis)} \\ \text{Hipótesis: } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ (información que puedo usar)} \\ \text{Puedo dar el valor de } \varepsilon \text{ que me convenga (siempre y cuando sea positivo)} \\ \text{Por ejemplo: } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \right.$

Lema. 2 Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

(Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge).



Demostración.

Sea $\epsilon > 0$.

P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon)$.

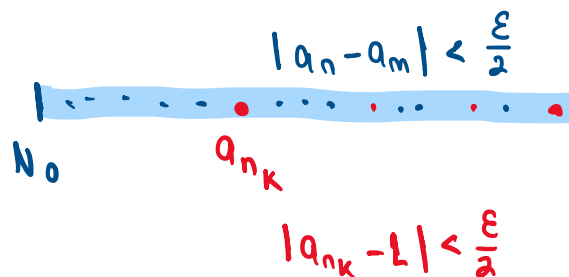
Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m \geq N_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}) \quad (.)$$

Por otro lado, como $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$, entonces * existe $K \geq N_0$

tal que

$$|a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad (..)$$



Definimos $\boxed{N = n_K} \geq K \geq N_0 \Rightarrow N \geq N_0$.

Sea $n \geq N \Rightarrow n \geq N_0$

$$\Rightarrow |a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L|$$

$$\leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{n, n_k \geq N_0} + |a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (.) \quad (..)$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L .

* existe $K \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k \geq K \quad |a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$

Definimos $K_* = \max\{K, N_0\} \Rightarrow \boxed{K_* \geq N_0}$ y como $K_* \geq K$
 $\Rightarrow |a_{n_{K_*}} - L| < \frac{\epsilon}{2}$

Nota: Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Por ejemplo, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow (a_n)$ diverge, pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

$(-1)^n$

$|a_{n+1} - a_n| = 2$

Teorema. (Criterio de Cauchy)

Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración.

$\Rightarrow$] Ya se demostró.

$\Leftarrow$] Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy.

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. (Lema 1)

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente (Teo. de Bolzano-Weierstrass)

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (Lema 2). (por ser de Cauchy).

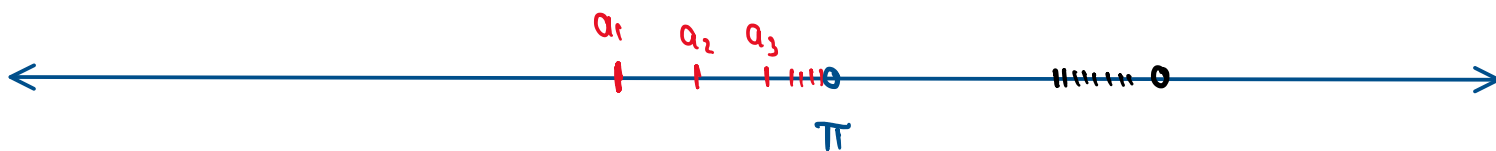
• En $\mathbb{Q}$:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \\ 3.1415926, \underline{3.14159265}, 3.141592653, 3.1415926535, \dots)$$

sucesión en $\mathbb{Q}$

$$n, m \gg N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{10^N}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$
que no converge en $\mathbb{Q}$.



• En $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

que no converge en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$