

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L , entonces cualquier subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L .

$$a_n \rightarrow L \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow L$$

$$a_n \not\rightarrow L \Leftarrow a_{n_k} \not\rightarrow L \quad (\text{contrapuesta})$$

- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a L , ¿es cierto que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L ? **No necesariamente**

$$\text{Sea } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge}$$

$$\text{pero } (a_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

$$\text{y } (a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

Otro ejemplo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \dots)$$

En este caso, como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Sin embargo, la sucesión constante $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (tomando los elementos con índice impar).

$$(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 8, 1, 2, 3, 12, 1, 2, 3, 16, \dots)$$

Ejemplos:

① Si $0 < b < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$

$$\text{Si } b = \frac{1}{2} \Rightarrow (b^n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \right)$$

• Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, como $0 < b \Rightarrow 0 < b^n$.

$$\text{Dado que } b < 1 \Rightarrow b^{n+1} < b^n$$

$$\Rightarrow 0 < \dots < b^n < \dots < b^3 < b^2 < b < 1$$

$\therefore (b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y está acotada inferiormente por 0.

Por lo anterior, $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b^{2n} = L \quad (\text{porque } (b^{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ es subsecuencia de } (b^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Por otro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^n)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow L = L^2 \Rightarrow L^2 - L = 0 \Rightarrow L(L-1) = 0 \Rightarrow L=0 \text{ o } L=1$$

Finalmente, como $0 < b^n \leq b$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tomando el límite tenemos que $0 \leq L \leq b < 1 \Rightarrow L < 1 \Rightarrow L=0$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$$

$$a_n \leq b_n$$

$$\Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$$

Otra Forma

* Finalmente, como

$$L = \inf \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \} \leq b < 1 \Rightarrow L < 1 \Rightarrow L=0$$

Ejercicio:

Si $b > 1 \Rightarrow (b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (no está acotada)

② Si $a > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$$(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}} = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \dots)$$

• Como $1 < a \Rightarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a}$
para toda $n \in \mathbb{N}$

• P.D. $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a} \iff (\sqrt[n]{a})^{n(n+1)} > (\sqrt[n+1]{a})^{n(n+1)}$$

$$\iff \left((\sqrt[n]{a})^n \right)^{n+1} > \left((\sqrt[n+1]{a})^{n+1} \right)^n$$

$$\iff a^{n+1} > a^n$$

Como $a > 1 \Rightarrow a^{n+1} > a^n$

$$\therefore \sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$$

$\therefore (\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y está acotada inferiormente por 1.

Así, $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

$$\text{Sea } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{a} = L \quad (\text{por ser subsucesión})$$

Por otro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{L}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{L} \Rightarrow L^2 = L \Rightarrow L^2 - L = 0 \Rightarrow L(L-1) = 0 \Rightarrow \boxed{L=0 \text{ o } L=1}$$

Finalmente, como

$$1 < \sqrt[n]{a} \Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$$

$$\Rightarrow 1 \leq L \Rightarrow L = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{si } a > 1.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{nm}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Ejercicio:

Si $0 < a < 1$, ¿la sucesión $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ converge?

Definición. Si $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \geq k$, definimos el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ como

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)! k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!} k!} \\ &= \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ números}}}{k!} \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-0)!} 0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! 1!} = \frac{\cancel{n} \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} 1!} = \frac{n}{1!} = n \quad \text{para cada } n \geq 1$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! 2!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{para cada } n \geq 2$$

Teorema del binomio de Newton:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Ejercicio: demostrar usando inducción sobre n .

Ejemplos:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a b + \binom{2}{2} b^2$$

$$= 1 a^2 + 2 a b + 1 b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$= 1 a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + 1 b^3$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[7]{7}, \dots)$$

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow b_n + 1 = \sqrt[n]{n} \Rightarrow (b_n + 1)^n = n$$

Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq n \Rightarrow {}^n\sqrt{1} \leq {}^n\sqrt{n} \Rightarrow 1 \leq {}^n\sqrt{n} \Rightarrow {}^n\sqrt{n} - 1 \geq 0 \\ \Rightarrow \boxed{b_n \geq 0}$$

$$\Rightarrow n = (1 + b_n)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} b_n + \underbrace{\binom{n}{2} 1^{n-2} b_n^2 + \dots + \binom{n}{n} b_n^n}_{\text{cada sumando es mayor o igual a cero}} \\ \geq \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \quad \text{para toda } n \geq 2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2 \quad \text{para toda } n \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{n(n-1)} \geq b_n^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq b_n \geq 0 \quad \text{para toda } n \geq 2$$

Notemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1}} = \sqrt{0} = 0$$

Por el teorema de compresión tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} ({}^n\sqrt{n} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} {}^n\sqrt{n} = 1.$$

Ejercicio:

Demostrar que si $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} {}^n\sqrt{a} = 1$ usando un argumento similar a la prueba anterior:

$$a_n = {}^n\sqrt{a}$$

$$b_n = {}^n\sqrt{a} - 1$$