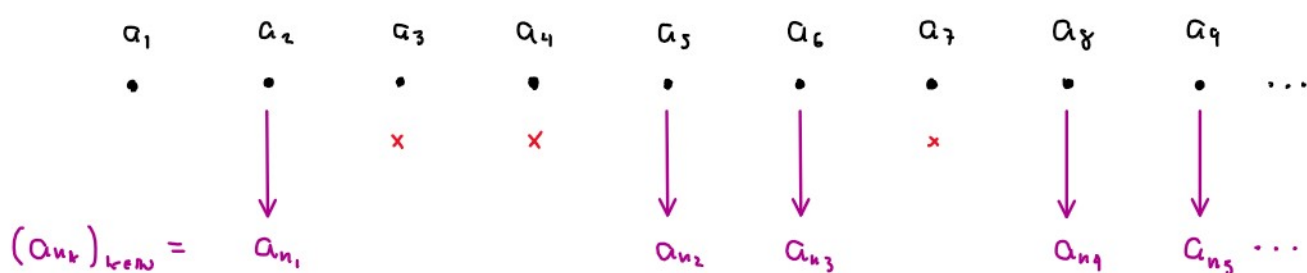


Subsucesiones y el teorema Bolzano-Weierstrass

jueves, 18 de noviembre de 2021

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión y $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ es una sucesión creciente de números naturales, entonces decimos que la sucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$



n_k → La " n " indica que $n_k \in \mathbb{N}$

k → La " k " nos dice que a_{n_k} es el k -ésimo elemento de $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

- ~ $\{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- ~ Las elementos de $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ siguen el mismo "orden" que en $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- ~ El k -ésimo índice de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es menor o igual que el k -ésimo índice de $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, es decir, $k \leq n_k$ p. c. $k \in \mathbb{N}$
- ~ Una subsucesión es una sucesión por si misma.

Ejemplos.

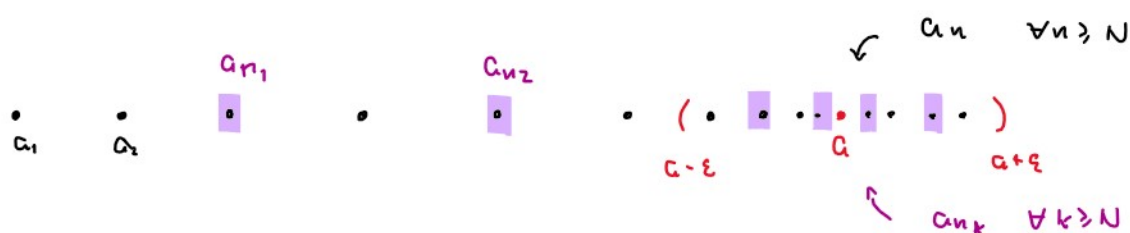
1) $(\frac{1}{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots)$ es subsucesión de $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots)$

2) $((-1)^{2k-1})_{k \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, -1, \dots)$ es subsucesión de $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

3) Las colas $(a_{k+n})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots)$ con $k \in \mathbb{N}$ son subsucesiones de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots)$

4) $(1, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, \dots)$ no es subsección de
 $(n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots)$ pues no sigue su mismo "orden"

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge a $a \in \mathbb{R}$, entonces toda subsección de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a a .



Dem. Sea $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsección de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y sea $\epsilon > 0$.

(P.D. $\exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K (|a_{n_k} - a| < \epsilon)$)

Como $a_n \rightarrow a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{p. c. } n \geq N \quad (*)$$

Ya que $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es subsección de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se cumple que

N -ésimo índice de $(a_{n_k}) \leftarrow n_N \geq N \rightsquigarrow N$ -ésimo índice de (a_n)

Si $k \geq N \Rightarrow n_k \geq n_N \geq N \quad (n_1 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots)$

De esta manera, si $k \geq N \Rightarrow n_k \geq N$

$$\Rightarrow |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

pues a_{n_k} es elemento de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\therefore a_{n_k} \rightarrow a \quad \square$$

Teorema (criterio de divergencia)

Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- 1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a a ;
- 2) existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ de manera que $n_k > n$ y $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$;
- 3) existe $\varepsilon_0 > 0$ y $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Dem. 1 $\Rightarrow$ 2 Supongamos que $a_n \not\rightarrow a$

$\Rightarrow$ No es cierto que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_k > n$ de manera que $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$. ✓

2 $\Rightarrow$ 3 Sea $\varepsilon_0 > 0$ de la hipótesis y sea $n = 1 \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ existe $n_1 \geq 1$ tal que $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0$

Aplicando la misma hipótesis a $n_1 \in \mathbb{N}$,

existe $n_2 > n_1$ tal que $|a_{n_2} - a| \geq \varepsilon_0$

Inductivamente encontramos números naturales

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

tales que $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es la subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que buscábamos.

3 $\Rightarrow$ 1 Por hipótesis, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ p. c. $k \in \mathbb{N}$. (◇)

Supongamos por contradicción que $a_n \rightarrow a$

$\Rightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon_0$ p. c. $n \geq N$ (□)

Consideremos $a_{n_N} \in (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow |a_{n_N} - a| > \varepsilon_0$$

Pero $n_N > N \Rightarrow |a_{n_N} - a| < \varepsilon_0$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \leq |a_{n_N} - a| < \varepsilon_0 \quad \forall$$

$$\therefore a_n \not\rightarrow a \quad \square$$

Ejemplo. Consideremos la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

$$(-1)^n, n \text{ impar} \leftarrow -1 \qquad \qquad \qquad 1 \rightarrow (-1)^n, n \text{ par}$$

Si $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, debe hacerlo a 1 o -1

Notemos que $((-1)^{2k-1})_{k \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \dots)$

es subsucesión de $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ y

$$|(-1)^{2k-1} - (1)| = |(-1) - 1| = -2 = 2 > 0$$

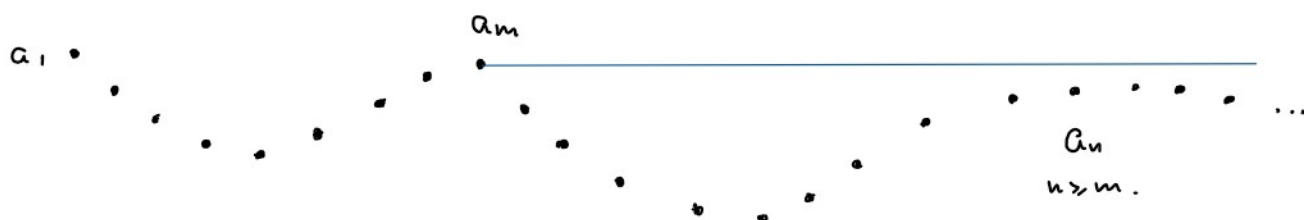
$$\Rightarrow |(-1)^{2k-1} - (1)| > 2 \quad \text{p. c. } k \in \mathbb{N}$$

El teorema nos dice que $(-1)^n \not\rightarrow 1$

Teorema de la subsucesión monótona.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, entonces existe una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que es monótona (creciente o decreciente).

Dem. Diremos que a_m es un **pico** de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $a_m > a_n$ p. c. $n > m$.



Caso 1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una infinidad de picos.



Sea a_{n_1} el primer pico de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow a_{n_1} \geq a_n \quad \text{p. c. } n \geq n_1$$

Sea a_{n_2} el segundo pico de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow n_2 > n_1 \quad \text{y} \quad a_{n_2} \geq a_n \quad \text{p. c. } n \geq n_2$$

$$\Rightarrow n_1 < n_2 \quad \text{y} \quad a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_n \quad \text{p. c. } n \geq 2$$

Si a_{n_k} es el k -ésimo pico de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow n_1 < \dots < n_k \quad \text{y} \quad a_{n_1} \geq \dots \geq a_{n_k} \geq a_n \quad \text{p. c. } n \geq n_k$$

Inductivamente definimos $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$

a todas las picos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que

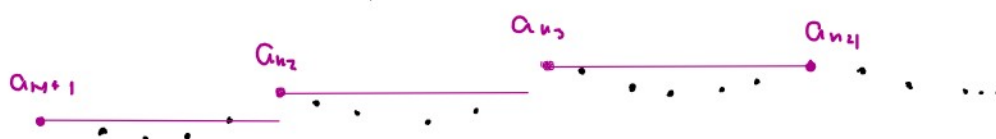
$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots \quad \text{y} \quad a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots \geq a_{n_k} \geq \dots$$

$\Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsección (monótona)

decreciente de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Caso 2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una cantidad finita de picos (o ninguna)

$a_{m_m} \rightarrow$ último pico de (a_n)



Sean $a_{n_1}, \dots, a_{n_m}$ todas las picas de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Fijemos a $n_1 = m_m + 1$ el primer índice después del último pico.

Fijemos a $n_1 = m_m + 1$ el primer índice después del último pico.

Como a_{n_1} no es pico de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe $n_2 > n_1$

tal que $a_{n_1} \leq a_{n_2}$

Ya que a_{n_2} no es pico de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe $n_3 > n_2$

tal que $a_{n_2} \leq a_{n_3}$

Inductivamente encontramos números naturales

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

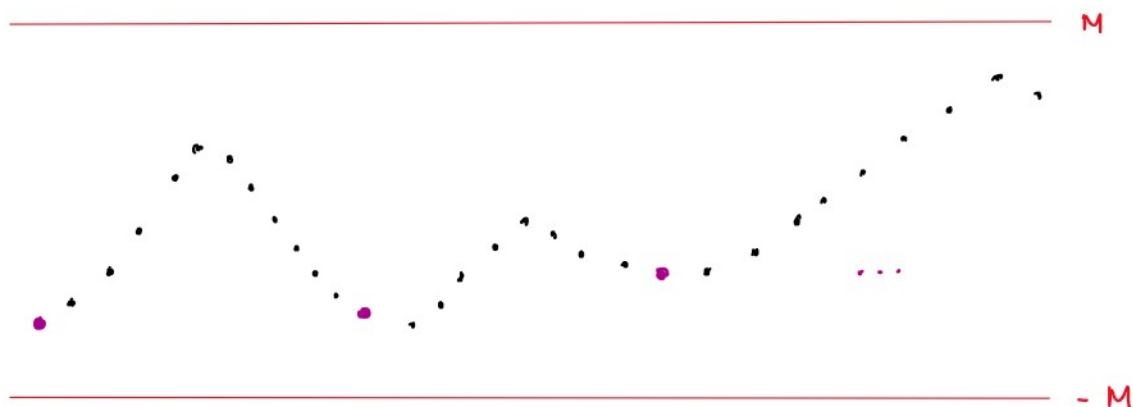
tales que $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k} \leq a_{n_{k+1}} \leq \dots$

$\Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión (monótona)

creciente de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ■

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.



Dem. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, es decir,

existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema anterior, existe $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión monótona de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow |a_{n_k}| \leq M \quad \text{p. c. } k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona y acotada

$\therefore$ Se sigue de un corolario anterior que
 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente. ■