

Definición. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la cola-m de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como la sucesión

$$(a_{m+n})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots)$$

(sucesión obtenida al quitar los primeros m términos de la sucesión original).

$$\text{Cola-1} \longrightarrow (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

$$\text{Cola-2} \longrightarrow (a_{n+2})_{n \in \mathbb{N}} = (a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$$

$$\text{Cola-7} \longrightarrow (a_{n+7})_{n \in \mathbb{N}} = (a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \dots)$$

$$\text{Cola-m} \longrightarrow (a_{n+m})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots)$$

Ejemplos:

$(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots)$ es la cola-4 de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots)$ no es una cola de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

$(\sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \dots)$ es la cola-7 de la sucesión $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$

Teorema. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$.

Entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si y solo si la cola-m $(a_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

En este caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m+n}$$

Demostación.

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = a_{m+n},$$

$$(a_1, a_2, \dots, \underline{a_N, a_{N+1}, \dots})$$

$$(a_5, a_6, \dots, \underline{a_N, \dots})$$

$$\text{es decir, } \begin{aligned} b_1 &= a_{m+1} \\ b_2 &= a_{m+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots, a_{m+n}, \dots)$$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_n$

$$(a_{m+n})_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$] Sup. que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m+n} = L$

$$\text{P.D. } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon)$

Como $a_n \rightarrow L$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_0$:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad (*)$$

Además, podemos suponer que $N_0 > m$.

(Si $N_0 \leq m$, definimos $N_1 = \max\{N_0, m+1\}$)

$$\Rightarrow \forall n \geq N_1, |a_n - L| < \varepsilon \text{ porque } n \geq N_0$$

Sea $N = N_0 - m$. Como $N_0 > m \Rightarrow N_0 - m > 0 \Rightarrow N = N_0 - m \in \mathbb{N}$.

Sea $n \geq N \Rightarrow n \geq N_0 - m \Rightarrow n + m \geq N_0$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_{n+m} - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

$\Leftarrow$] Sup. ahora que $(a_{n+m})_{n \in \mathbb{N}}$ converge y sea

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+m} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{P.D. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$

Como $b_n \rightarrow L$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_0$:

$$|b_n - L| < \varepsilon$$

$$|a_{n+m} - L| < \varepsilon. (*)$$

Definimos $N = N_0 + m \Rightarrow N \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_0 + m \Rightarrow n - m \geq N_0$

$$\Rightarrow (*) |a_{(n-m)+m} - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Recordatorio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0$$

Teorema Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

Demostración

Caso 1) $L = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| < \varepsilon)$.

Dado que $\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon^2 > 0$.

Como $a_n \rightarrow L = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$:

$$a_n = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow a_n < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

$$\text{Luego, si } n \geq N \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = |\sqrt{a_n}| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{0}.$$

Caso 2) $L \neq 0$

Como $a_n \geq 0$ p.c. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0 \Rightarrow L > 0. \Rightarrow \sqrt{L} > 0$

P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$

porque
 $L \neq 0$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = \left| (\sqrt{a_n} - \sqrt{L}) \left(\frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \right) \right| = \left| \frac{a_n - L}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \right| * = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}$$

$$* \sqrt{a_n} \geq 0 \text{ y } \sqrt{L} > 0 \Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{L} > 0$$

Por otro lado, como $\sqrt{a_n} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{L} \geq \sqrt{L} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{1}{\sqrt{L}}$

$$\Rightarrow \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{L}} |a_n - L|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{1}{\sqrt{L}} |a_n - L|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \leq \frac{1}{\sqrt{L}} |a_n - L| \quad (*)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}} |a_n - L| = \frac{1}{\sqrt{L}} (0) = 0$

Deducimos de (*) y el teorema de compresión que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0}$$

* Ejercicio: demostrar el caso 2 usando la definición de convergencia.

Ejemplo: Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

$$\vdots$$
$$a_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}}_{n \text{ veces } (n \text{ dos})}$$

① P.D. $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < a_n < 2$ (por inducción sobre n)

$$\underline{n=1} \mid \text{ Como } 1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \\ \Rightarrow 1 < a_1 < 2.$$

$\therefore$ la desigualdad se cumple para $n=1$

• Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$1 < a_n < 2$$

• P.D. $1 < a_{n+1} < 2$

$$\text{P.D. } 1 < \sqrt{2a_n} < 2$$

$$\text{Dado que } 1 < a_n < 2 \Rightarrow 2 < 2a_n < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < \sqrt{2a_n} < \sqrt{4} = 2 \\ \Rightarrow 1 < a_{n+1} < 2.$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < a_n < 2$$

$$* a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada

② Por otro lado, como

$$\begin{aligned} a_n &< 2 \\ \Rightarrow a_n^2 &< 2a_n \quad (\text{porque } a_n > 0) \\ \Rightarrow a_n = \sqrt{a_n^2} &< \sqrt{2a_n} \\ \Rightarrow a_n &< a_{n+1} \end{aligned}$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

De ① y ② concluimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (por ser monótona y acotada).

$$\text{Sea } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n = 2L$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2L}$$

Por otro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es la cola-1 de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \sqrt{2L} = L \Rightarrow 2L = L^2 \Rightarrow L^2 - 2L = 0$$

$$\Rightarrow L(L-2) = 0 \Rightarrow L = 0 \text{ o } L = 2$$

Finalmente, como

$$1 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1 \leq L \leq 2 \Rightarrow L = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$