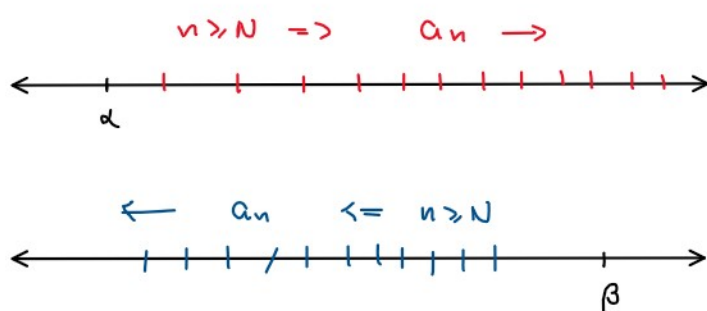


Sucesiones divergentes y subsucesiones

martes, 16 de noviembre de 2021

Definición. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

- Decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge a infinito**, y lo denotamos por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \alpha$ para cada $n > N$.
- Decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge a menos infinito**, denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, si para toda $\beta \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < \beta$ para cada $n > N$.



(Los símbolos " ∞ " y " $-\infty$ " son solo notación, no números reales)

Ejemplos.

1) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \alpha$

$$\Rightarrow n > \alpha \text{ para cada } n > N$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

2) $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \alpha$

$$\text{Como } N \geq 1 > 0 \Rightarrow N^2 \geq N > \alpha$$

$$\text{Si } n > N \Rightarrow n^2 \geq N^2 > \alpha$$

$$\Rightarrow n^2 > \alpha \text{ p. c. } n > N$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

3) $(-\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{Si } \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \beta < 0 \Rightarrow \beta^2 > 0$$

Por p. A. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \beta^2 < N$

$$\Rightarrow -\beta = |\beta| = \sqrt{\beta^2} < \sqrt{N}$$

$$\text{Si } n > N \Rightarrow \sqrt{n} > \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > -\beta$$

$$\Rightarrow -\sqrt{n} < \beta \quad \text{p. c. } n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt{n} = -\infty.$$

Observaciones:

~ Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no esta acotada.

~ No todas las sucesiones divergentes divergen a ∞ o $-\infty$.

Ejemplo. Consideremos la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$\Rightarrow -1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \text{p. c. } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ esta acotada}$$

$$\therefore ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no diverge a } \infty \text{ o } -\infty.$$

Teorema. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

1) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y no acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

2) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y no acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Dem 1) Supongamos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$ p. c. $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no esta acotada pero esta acotada inferiormente por a_1 , se sigue que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no esta acotada superiormente.

De esta manera, si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < a_N$$

Para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente

$$\Rightarrow \alpha < a_N \leq a_n \quad \text{p.c. } n \geq N$$

$$\Rightarrow \alpha < a_n \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

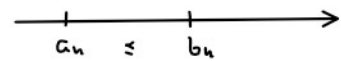
2) Tarea

Teorema. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que

$$a_n \leq b_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.



$a_n \rightarrow \infty$

a_n empuja a b_n a ∞

Dem 2) Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_n < \beta \quad \text{p.c. } n \geq N$$

$$\Rightarrow a_n \leq b_n < \beta \quad \text{p.c. } n \geq N$$

$$\Rightarrow a_n < \beta \quad \text{p.c. } n \geq N$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

1) Tarea

Observación. Este teorema también es válido para sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $a_n \leq b_n$ para cada $n \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Consideremos $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

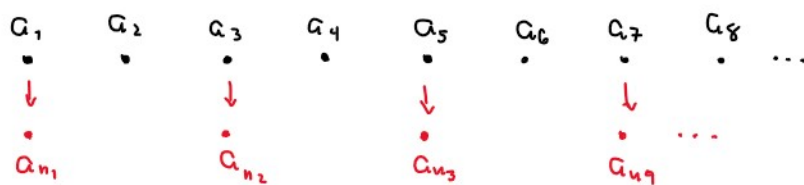
Ya hemos visto que $n \leq 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Teorema.* Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $c > 0$.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = \infty.$$

Dem. Tarea



$$(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (2k-1)_{k \in \mathbb{N}}$$

↳ La "n" en " n_k " indica que $n_k \in \mathbb{N}$ p.c. $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplos. Consideremos la sucesión

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right)$$

1) Sea $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (k+2)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$

$$(k+2)_{k \in \mathbb{N}} = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k+2}\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

2) $(n_l)_{l \in \mathbb{N}} = (3l-1)_{l \in \mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$

$$(3l-1)_{l \in \mathbb{N}} = (2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n_l}\right)_{l \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{3l-1}\right)_{l \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots\right)$$

es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

3) $\left(\frac{1}{m^2}\right)_{m \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots\right)$ es subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

pues $(n_m)_{m \in \mathbb{N}} = (m^2)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión est. creciente en $\mathbb{N}$

4) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{6}, 5, \dots\right)$ **no** es subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

pues no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $3 = \frac{1}{n}$, es decir,

3 no es elemento de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

5) $\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \dots\right)$ **no** es subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

pues 0 no está en $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Observación. Si $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$