

Definición. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Se dice que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente si
(estrictamente creciente)

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$a_n < a_{n+1}$$

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

- Se dice que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente si
(estrictamente decreciente)

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$a_n > a_{n+1}$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

- * Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, entonces

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m)$$

- * Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, entonces

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m).$$

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Ejemplos:

- $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ es ^{estrictamente} creciente $a_n = n < n+1 \leq a_{n+1}$

- $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es ^{estrictamente} decreciente $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ no es monótona
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3$ (no es creciente ni decreciente)

$$a_1 > a_2 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no es creciente}$$

$$a_2 < a_3 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no es decreciente.}$$

- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ no es monótona
- Una sucesión constante $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y decreciente.

$$a_n = c \leq c \leq a_{n+1} \Rightarrow (c)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es creciente}$$

$$a_n = c \geq c \geq a_{n+1} \Rightarrow (c)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es decreciente,}$$

pero $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

- Sea $a \in \mathbb{R}$.

$$(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a^2, a^3, a^4, \dots)$$

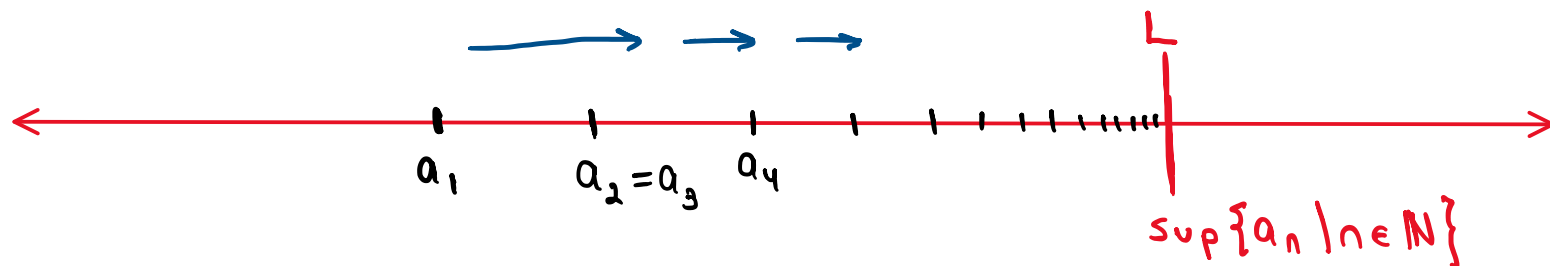
- Si $\underline{a > 1} \Rightarrow \underline{a^{n+1} > a^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente
- Si $a = 1 \Rightarrow a^n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow (a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión constante
- Si $\underline{0 < a < 1} \Rightarrow \underline{a^{n+1} < a^n}$ p.c. $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente
- Si $a = 0 \Rightarrow (a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ es constante
- Si $a < 0 \Rightarrow a^n > 0$ si n es par
 $a^n < 0$ si n es impar
 $\Rightarrow (a^n)$ no es monótona.

$$\begin{array}{l} a^1 < 0 \\ 0 < a^2 \\ a^3 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a^1 < a^2 \\ a^3 < a^2 \end{array}$$

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona y acotada, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Además:

a) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

b) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.



Demostración.

a) Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada $\Rightarrow$ el conjunto $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente y es no vacío ($a_1 \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$).

Usando el axioma del supremo, sea

$$L = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $L - \varepsilon < L$ (porque $\varepsilon > 0$) y

$L = \sup \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow L - \varepsilon$ no es cota superior de $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$L - \varepsilon < a_N.$$

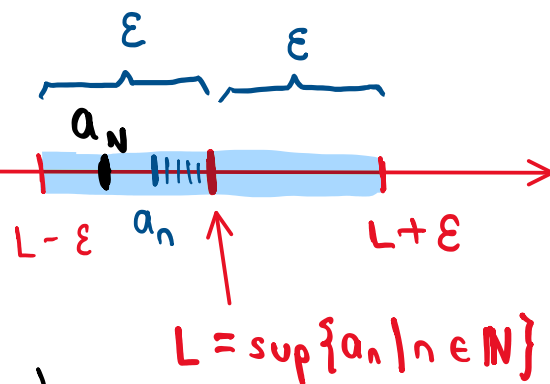
Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$.

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y $N \leq n \Rightarrow a_N \leq a_n$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

$\uparrow$
 L es cota superior de $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

$\varepsilon > 0$



$$\Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq N$$

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

b) Ejercicio.



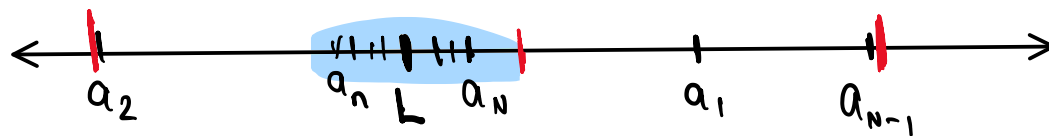
Ejemplo:

$(n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona (es estrictamente creciente), pero diverge.

Corolario. Una sucesión monótona de números reales es convergente si y solo si está acotada.

Demostración

$\Rightarrow$] Cualquier sucesión convergente está acotada (teorema previo).



$\Leftarrow$] Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y acotada, por el teorema anterior $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Ejemplos:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0

• $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente porque para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < n \leq n+1$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

• Además, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, porque

para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq n$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{1} \leq \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

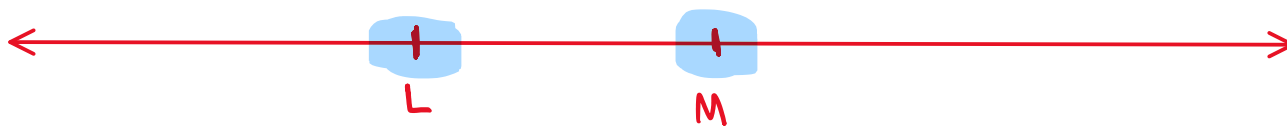
$\therefore \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (por ser decreciente y acotada).

$$\text{Sea } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow L^2 = 0 \Rightarrow L = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

* Ejercicio. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces su límite es único (no puede tener dos límites distintos), es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$, entonces $L = M$.



2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Por ejemplo:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 1.8\bar{3}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2.08\bar{3}$$

$$a_{10} \approx 2.929$$

$$a_{100} \approx 5.187$$

$$a_{1000} \approx 7.485$$

Sabemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente porque

$$a_n < a_n + \frac{1}{n+1} = a_{n+1} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

¿ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente?

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$a_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$a_{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

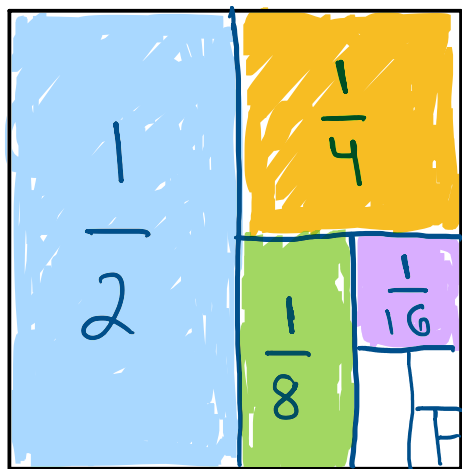
En general

$$a_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no está acotada superiormente}$$

$$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge.}$$

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Colas de sucesiones

$$\text{Sea } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

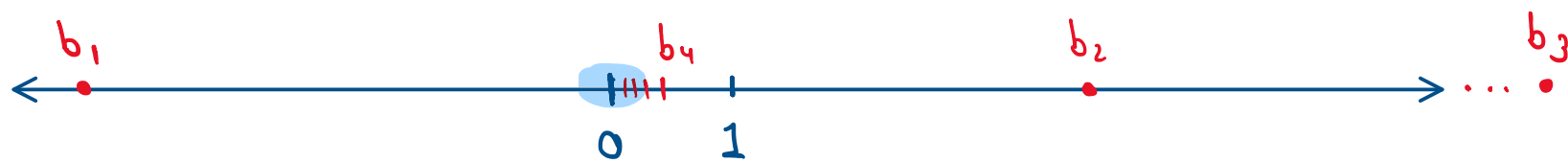
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Consideremos

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-10, 8, 305, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{si } n \geq 4$$



$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

(los primeros términos no influyen en la convergencia o divergencia de una sucesión)

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

A las sucesiones

$$(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

$$(a_{n+2})_{n \in \mathbb{N}} = (a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$$

$$(a_{n+7})_{n \in \mathbb{N}} = (a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \dots)$$

$$(a_{n+m})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots)$$

las llamaremos "colas" de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Definición. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos la cola-m de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como la sucesión

$$(a_{m+n})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots)$$

(sucesión obtenida al quitar los primeros m términos de la sucesión original).