

Ejercicios de sucesiones convergentes

jueves, 11 de noviembre de 2021

Ejercicio. Determine si las siguientes sucesiones convergen:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; 3) $\left(\frac{3 - \sqrt{n}}{4 + \sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$; 4) $\left(\frac{1 - 2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sol. 1) Afirmación: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{P.D. } \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < \sqrt{n}^2 = n \end{array} \right]$$

Como $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{\varepsilon^2} > 0$. Por propiedad arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon^2} < N$.

$$\text{Sea } n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}} < \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

$$a, b > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Si $c, d > 0$,

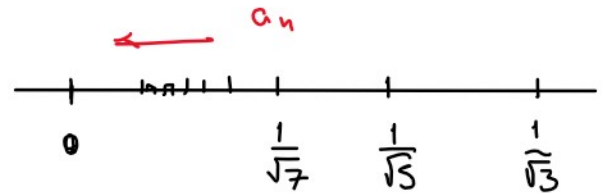
$$a = \sqrt{c} \quad \gamma \quad b = \sqrt{d}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c} < \sqrt{d} \Leftrightarrow c < d$$

$$2) \quad n=1, \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n=2, \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$n=3, \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$



Afirmación: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

Teorema. $a_n \leq b_n \leq c_n$, $a_n \rightarrow L$ y $b_n \rightarrow L$
 $\Rightarrow b_n \rightarrow L$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $1 < 2$

$$\Rightarrow 0 < n < 2n < 2n+1$$

$$\Rightarrow 0 < n < 2n+1$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{n} < \sqrt{2n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{p.c. } n \in \mathbb{N}$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, se sigue del Teorema

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$.

$$3) \text{ Afirmación: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{n}}{4 + \sqrt{n}} = \frac{-1}{1} = -1$$

Notemos que

$$\frac{3 - \sqrt{n}}{4 + \sqrt{n}} = \frac{\frac{3 - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{4 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1}$$

Dado que cada uno de los límites existen, se sigue de los teoremas vistos en clase que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{n}}{4 + \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - 1}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + 1)} \\ &= \frac{3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)}{4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{-1}{1} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{n}}{4 + \sqrt{n}} &= -1\end{aligned}$$

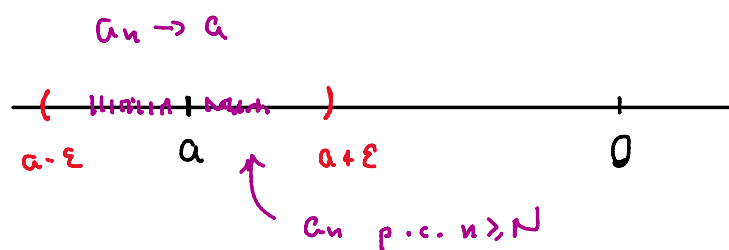
4) $\left(\frac{1 - 2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1 - 2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \cdot \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Ejercicio. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $a < 0$.

Demuestra que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 0$ para cada $n \geq M$



Sol. Sea $\epsilon = -a > 0$. Como $a_n \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$ p.c. $n \geq N$

$\Rightarrow |a_n - a| < -a$

$\Rightarrow a_n - a \leq |a_n - a| < -a$

$(b \leq |b| \text{ p.c. } b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow a_n - a < -a$$

$$\Rightarrow a_n < 0$$

Haciendo $M=N$, se sigue que $a_n < 0$ p. c. $n \geq M$ $\square$

Ejercicio. Muestre que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 y $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo.

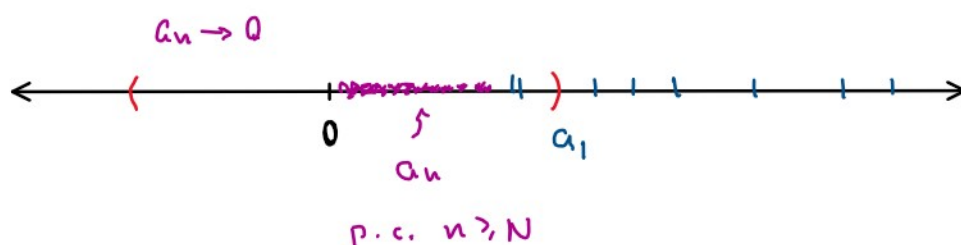
Sol. Sea $\varepsilon = a_1 > 0$. Como $a_n \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ t. q.

$$\Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{p. c. } n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| < a_1$$

$$\Rightarrow a_n < a_1 \quad \text{p. c. } n \geq N \quad (1)$$

No sabemos donde están $a_2, \dots, a_{N-1}$



Sea $M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$.

P.D. $M = \max \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

~ Por definición, $M \in \{a_1, \dots, a_{N-1}\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow M \in \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

~ Veamos que M es cota superior de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \text{ Si } n \leq N-1 \Rightarrow a_n \in \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$$

$$\Rightarrow a_n \leq \max \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$$

$$\Rightarrow a_n \leq M$$

$$\bullet \text{ Si } n \geq N \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a_n < a_1 \text{ con } a_1 \in \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$$

$$\Rightarrow a_n < a_1 \text{ y } a_1 \leq M$$

$$\Rightarrow a_n < M$$

$$\Rightarrow a_n \leq M \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

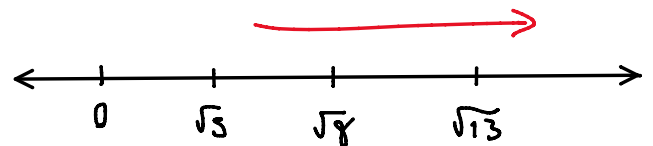
$$\therefore M = \max \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ejercicio. Determina si la sucesión $(\sqrt{n^2+4})_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superior o inferiormente y si es monótona.

Sol. $n=1, \sqrt{1^2+4} = \sqrt{5}$

$$n=2, \sqrt{2^2+4} = \sqrt{8}$$

$$n=3, \sqrt{3^2+4} = \sqrt{13}$$



~ Notamos que $n^2+4 > 0$ p. c. $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2+4} > 0 \text{ p. c. } n \in \mathbb{N}$$

Esto es, 0 es una cota inferior de la sucesión

$$\Rightarrow (\sqrt{n^2+4})_{n \in \mathbb{N}} \text{ está acotada inferiormente.}$$

~ Veamos que la sucesión no está acotada superiormente.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } K > 0, \text{ nos gustaría encontrar } n \in \mathbb{N} \text{ t. q.} \\ K < \sqrt{n^2+4} \\ \Leftrightarrow K^2 < n^2+4 \\ \Leftrightarrow K^2-4 < n^2 \end{array} \right]$$

$$\text{Consideremos } K > 2 \Rightarrow K^2 > 4$$

$$\Rightarrow K^2 - 4 > 0$$

Por propiedad arquimediática, existe $n \in \mathbb{N}$ t. q.

$$K^2 - 4 < n < n^2$$

$$(1 < n \stackrel{n>0}{\Rightarrow} n < n^2)$$

$$\Rightarrow K^2 - 4 < n^2$$

$$\Rightarrow 0 < K^2 < n^2 + 4$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{K^2} < \sqrt{n^2 + 4}$$

$\therefore$ La sucesión no está acotada sup.

~ Veamos que la sucesión es creciente.

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < n+1$$

$$\Rightarrow n^2 < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow 0 < n^2 + 4 < (n+1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 + 4} < \sqrt{(n+1)^2 + 4} \quad \text{p. c. } n \in \mathbb{N}$$

$\therefore (\sqrt{n^2 + 4})_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.

~ Finalmente veamos que la sucesión es creciente

$$(a_n \leq a_{n+1} \quad \text{p. c. } n \in \mathbb{N})$$

$$\text{Sea } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < n+1$$

$$\Rightarrow n^2 < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow \overset{0}{+} n^2 + 4 < (n+1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 + 4} < \sqrt{(n+1)^2 + 4} \quad \text{p. c. } n \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ La sucesión es monótona creciente.