

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

- Decimos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge o que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- En caso contrario, diremos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge o que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión divergente.

Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right]^k = 0^k = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right]^k$$

b) $\left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = \boxed{2}$$

c) $\left(\frac{3n+5}{7n-10}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{7n-10} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+5}{n}}{\frac{7n-10}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{7 - \frac{10}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{10}{n}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 7 - 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{3 + 5(0)}{7 - 10(0)} = \boxed{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

d) $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2(0)}{1 + 0} = \frac{0}{1} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$e) \left(\frac{2n^2}{n^2+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$f) \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Sabemos que para toda $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

En particular, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -0 = 0$$

0

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, por el "Teorema del sándwich"

tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

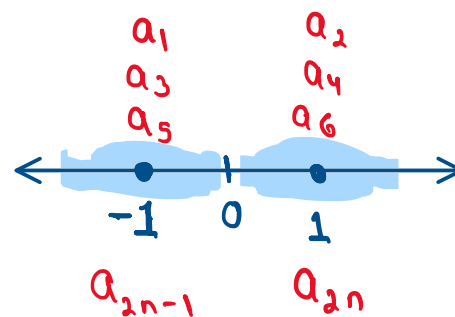
$$g) (n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

Como $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada $\Rightarrow (n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

* Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

h) $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$
 diverge



Demostración. (Por contradicción)

Supongamos que $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un número real L .

Sea $\varepsilon = 1 > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$|(-1)^n - L| < 1$$

$$\text{Si } n \geq N \text{ y } n \text{ es par} \Rightarrow (-1)^n = 1$$

$$\Rightarrow |1 - L| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - L < 1 \xRightarrow{-1} -2 < -L < 0 \Rightarrow 2 > L > 0 \Rightarrow 0 < L < 2$$

$$\text{Por otro lado, si } n \geq N \text{ y } n \text{ es impar} \Rightarrow (-1)^n = -1$$

$$\Rightarrow |-1 - L| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < -1 - L < 1 \xRightarrow{+1} 0 < -L < 2 \Rightarrow 0 > L > -2 \Rightarrow -2 < L < 0$$

Luego, $0 < L < 2$ y $-2 < L < 0$! $\therefore ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

i) $(0, 4, 0, 4, 0, 4, 0, 4, \dots)$ diverge

Teorema previo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ está acotada}$$

$$\nLeftarrow$$

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Teorema. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L , entonces la sucesión $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ de valores absolutos converge a $|L|$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$:

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Por la desigualdad del triángulo para la resta,

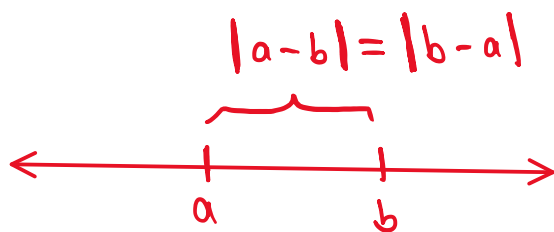
$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow ||a_n| - |L|| < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|.$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$$

$|a - b|$ = distancia entre a y b .



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$$

$\nLeftarrow$

* Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a$.

¿Es cierto que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge? No (¿Contraejemplo?)

Dar $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

$$\text{Sea } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow (|a_n|)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } 1, \text{ pero } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge.}$$

- Demostrar que:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0$$

Demostración

1) $\Rightarrow$] Por el teorema anterior, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |0| = 0$.

$\Leftrightarrow$ Sup. que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. (P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$)

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$:

$$| |a_n| - 0 | < \varepsilon$$

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\underbrace{| |a_n| - 0 |}_{\leq \epsilon} \leq |a_n - 0|$$

Notemos que

$$\underline{| |a_n| - 0 |} = | |a_n| | = |a_n| = |a_n - 0|$$

$$\Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{para toda } n \geq N.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

2) Debido a 1), sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0$$

Falta probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$$

$\Rightarrow$] Sup. que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

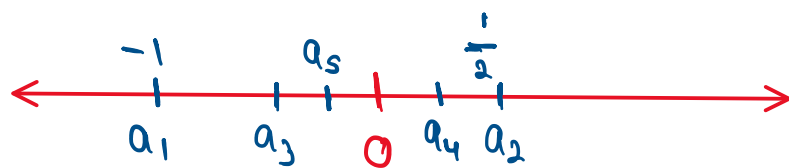
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} L = L - L = 0$$

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n - L) + L) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) + \lim_{n \rightarrow \infty} L = 0 + L = L.$$

Ejemplo:

• $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right)$ converge a 0.



$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Otra prueba:

$$\text{Como } (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, por el "Teorema del sándwich"

concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Definición. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Se dice que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente si
(estrictamente creciente)

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$a_n < a_{n+1}$$

es decir,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

- Se dice que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente si
(estrictamente decreciente)

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$a_n > a_{n+1}$$

es decir,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Ejemplos:

- $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente $a_n = n \leq n+1 \leq a_{n+1}$

- $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente $a_n = \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{-2}_{a_2}, \underbrace{3}_{a_3}, -4, 5, -6, \dots)$ no es monótona
(no es creciente ni decreciente)

$$a_1 > a_2 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no es creciente}$$

$$a_2 < a_3 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ no es decreciente.}$$

- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ no es monótona

- Una sucesión constante $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y decreciente.

$$a_n = c \leq c \leq a_{n+1} \Rightarrow (c)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es creciente}$$

$$a_n = c \geq c \geq a_{n+1} \Rightarrow (c)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es decreciente.}$$