

Teorema. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Se cumple lo siguiente:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot a$

4) Si $b \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

5) Si $b \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

6) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$

Demostración. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

1), 2) y 6) $\checkmark$

3) Considerando la sucesión constante $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ y la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, debido a 2) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = c \cdot a.$$

Otra demostración de 3):

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\frac{\varepsilon}{|c|+1} > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|+1}).$$

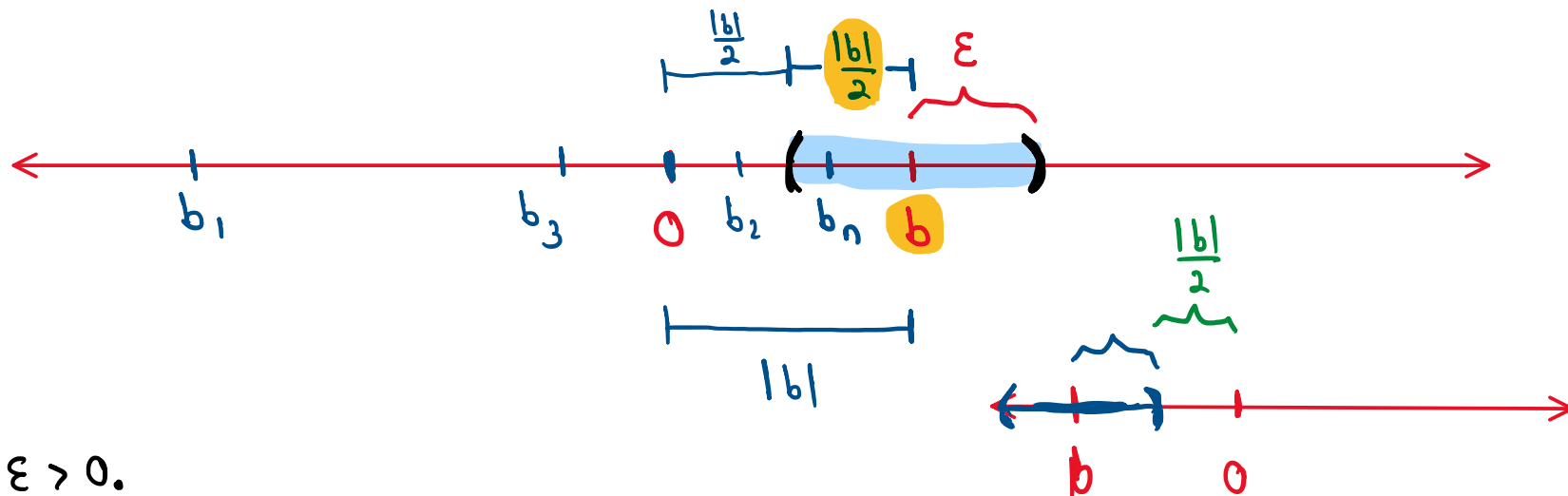
Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N$

$$\Rightarrow |c a_n - c a| = |c (a_n - a)| = |c| \cdot |a_n - a| < (|c|+1) \left(\frac{\varepsilon}{|c|+1} \right) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |c a_n - c a| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c a.$$

4) Sup. que $b \neq 0$. P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.



Sea $\epsilon > 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ y $\frac{|b|}{2} > 0$ (porque $b \neq 0$), entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$

tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \right)$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_1$

$$\Rightarrow |b| - |b_n| \leq |b - b_n| = |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

Desig. del Δ
para la resta

$$\Rightarrow |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n|$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|b|}{2} < |b_n| \text{ para cada } n \geq N_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \text{ para cada } n \geq N_1} (*)$$

Por otro lado, usando que $b_n \rightarrow b$ y que $\frac{\epsilon |b|^2}{2} > 0$ (porque $\epsilon > 0$ y $b \neq 0$),

entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon |b|^2}{2} \right) (**)$$

Definimos $N = \max \{N_1, N_2\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq N_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} (*) \text{ y } |b_n - b| < \frac{\epsilon |b|^2}{2} (**)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b|$$

$$< \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \left(\frac{\varepsilon |b|^2}{2} \right) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Nota:

En (*) demostramos que $0 < |b_n|$ para cada $n \geq N_1$,

$\Rightarrow b_n \neq 0$ para cada $n \geq N_1$.

Si $b_n = 0$ para alguna $n < N_1 \Rightarrow \frac{1}{b_n}$ no está definido.

En este caso, solamente podemos garantizar que $\frac{1}{b_n}$ está definido cuando $n \geq N_1$. Entonces podemos considerar la "sucesión"

$$\left(\frac{1}{b_n} \right)_{n \geq N_1} = \left(\frac{1}{b_n} \right)_{n=N_1}^{\infty},$$

que converge a $\frac{1}{b}$.

5) P.D. Si $b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(\frac{1}{b_n} \right) \stackrel{2)}{\uparrow} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \right) \stackrel{4)}{\uparrow} = a \left(\frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b}.$$

• Demostrar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + (-b_n))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)b_n \quad 1)$$

$$= a + (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad 3)$$

$$= a + (-1)b = a - b$$

Teorema. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

- 1) Si $0 \leq a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq a$.
- 2) Si $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.

Demostración

1) Supongamos que $a < 0$

$$\Rightarrow -a > 0$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $-a > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < -a$$

$$\Rightarrow a < a_n - a < -a$$

$$\Rightarrow 2a < a_n < 0$$

$$\Rightarrow a_n < 0 \text{ para toda } n \geq N ! \quad (a_n \geq 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N})$$

$$\therefore a \geq 0$$

2) Como $0 \leq b_n - a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, debido a 1) sabemos que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = b - a \Rightarrow 0 \leq b - a \Rightarrow a \leq b.$$

Observación

$$\bullet a_n > 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$$

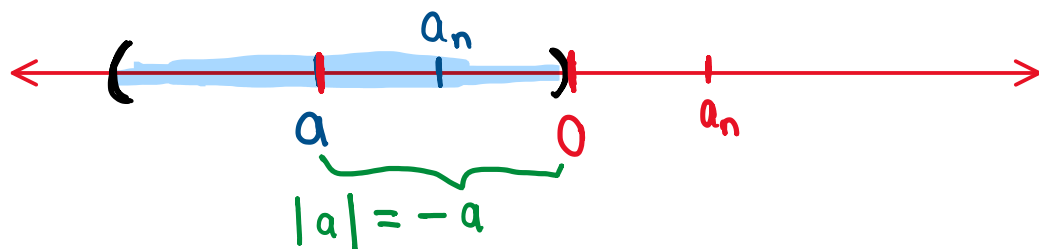
$$\frac{1}{n} > 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, \text{ pero } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \not> 0.$$

$$\bullet \text{ Si } a_n < b_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\bullet \text{ Si } a_n \leq b_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(si (a_n) y (b_n) convergen)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < b_n \Rightarrow a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$



$$\begin{aligned} |a| &< b \\ \Updownarrow \\ -b &< a < b \end{aligned}$$

Teorema de comparación o Teorema del sándwich

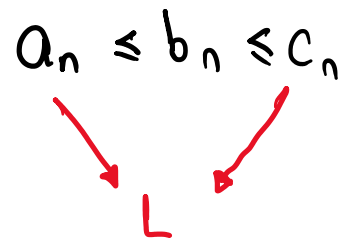
Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$.

Si

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

$$\text{entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$


Demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $a_n \rightarrow L$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

Como $c_n \rightarrow L$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$:

$$|c_n - L| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$$

Definimos $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq N_2$.

Dado que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$-\varepsilon < \underbrace{a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L}_{\substack{\uparrow n \geq N_1 \quad \uparrow n \geq N_2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$