

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

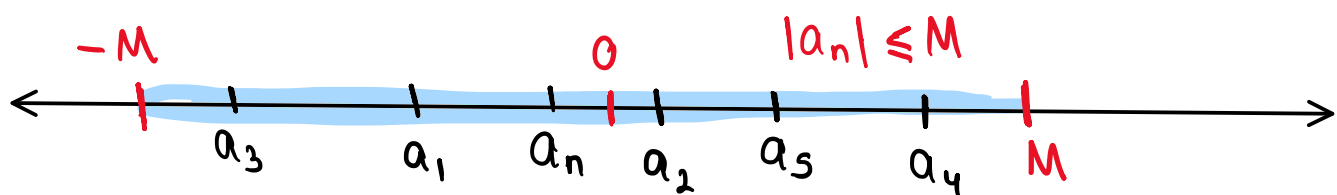
$$\text{Si } a_n = \frac{1}{n} \text{ y } b_n = 5n + 2$$

$$\Rightarrow a_n + b_n = \frac{1}{n} + 5n + 2$$

Definición Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada si existe $M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M$.

Obs.

Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.



Ejemplos:

- La sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada (por $M=1$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{1}{n} \right| \leq 1$$

- La sucesión $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada porque $\{n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ no está acotado.

Desigualdad del triángulo para la resta

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

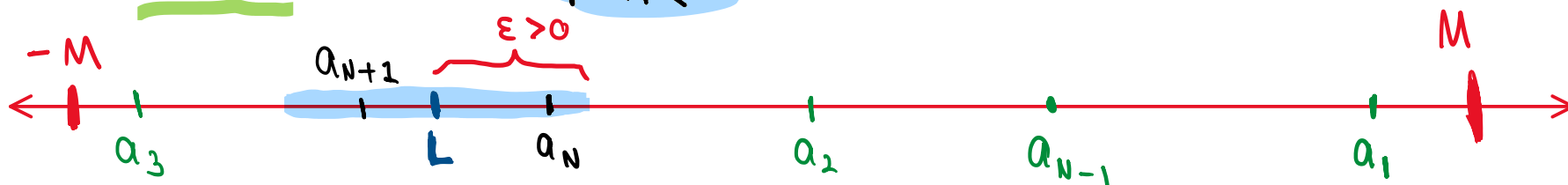
Teorema. Toda sucesión convergente está acotada,
(Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada).

Demostración

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente. Sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

P.D. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.

P.D. $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M$



Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, tomando $\varepsilon = 1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq N \quad |a_n - L| < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \quad |a_n| - |L| \leq |a_n - L| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \geq N \quad |a_n| < |L| + 1} \quad (*)$$

Sea $M = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |L| + 1 \}$

Como $M \geq |L| + 1 \geq 1 \Rightarrow M > 0$.

P.D. $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$

Sea $n \in \mathbb{N}$. - Si $n < N \Rightarrow |a_n| \leq M$ por definición de máximo

- Si $n \geq N \Rightarrow |a_n| < |L| + 1 \leq M \Rightarrow |a_n| \leq M$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M$$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada

Desigualdad del
triángulo

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Teorema. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Se cumple lo siguiente:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot a$

4) Si $b \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

5) Si $b \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

6) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$

Demostración

1) Sea $\varepsilon > 0$.

P.D. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon)$

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \quad y$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Definimos $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow N \geq N_1 \quad y \quad N \geq N_2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1 \quad y \quad n \geq N_2$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (\text{Desigualdad del triángulo})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

a) P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada
 $\Rightarrow$ existe $M > 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M})$.

Por otro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ y $\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} > 0$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$

tal que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)})$.

Definimos $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq N_2$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{y} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - \underline{a b_n} + \underline{a b_n} - ab|$$

$$= |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)|$$

$$\leq |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \quad (\text{Desig. del } \Delta)$$

$$= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| |b_n - b|$$

$$< \underline{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + (|a|+1) \left(\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

$$6) \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k.$$

(Por inducción sobre k).

• (Base)

$$S, k=1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = a' \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n' = a'.$$

↑
hipótesis.

• Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$$

P.D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{k+1} = a^{k+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^k \cdot a_n) = \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k \right)}_{(2)} \cdot \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)}_{\text{hip. inducción.}} = a^k \cdot a = a^{k+1}$$

$$\therefore \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k.$$