Límite de una sucesión

Definición. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $L\in\mathbb{R}$.
Diremos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L (o que L es el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) si para toda $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para toda $n\in\mathbb{N}$: si $n\geq N$, entonces $|a_n-L|<\varepsilon$.

$$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ (\, n\geq N \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon\,)$$

Recordatorio:

- Por la Propiedad Arquimediana, $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n\in\mathbb{N}\ \ \frac{1}{n}<\varepsilon$

$$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, N\in\mathbb{N}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ (\, n\geq N \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon\,)$$

Ejemplo:

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, es decir, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.
   (en este caso, $L=0$).

Demostración.

- Sea $\varepsilon>0$. Por la propiedad arquimediana, existe $N\in\mathbb{N}$ t.q.
$$\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

- Sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq N$.

P.D. $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

Como $0<N\leq n \Rightarrow 0<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

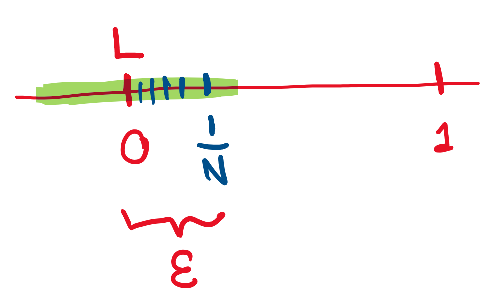
Queremos que $\forall\, n\geq N$:

$$\boxed{|a_n-L|<\varepsilon}$$

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$



$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \right)$

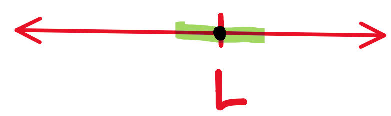
(2) Consideremos $c \in \mathbb{R}$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión constante c, es decir, $a_n = c$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} c = c \right)$.

(Toda sucesión constante $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a c).

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Definimos $N = 1$. *



Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$.

$\Rightarrow |a_n - L| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} c = c.$

$|a_n - L| < \varepsilon$

$|5 - 5| < \varepsilon$

$|0| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$

* Cualquier valor de N funciona porque $a_n = 5$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-4}{3n+2} = \dfrac{5}{3}$

$$\frac{5(10\,000) - 4}{3(10\,000) + 2} \approx \frac{50\,000}{30\,000} = \frac{5}{3}$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{22} > 0$, por la propiedad arquimediana (P.A.), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{22}. \quad (*)$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{n \geq N}$. P.D. $\left| \dfrac{5n-4}{3n+2} - \dfrac{5}{3} \right| < \varepsilon$

Como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0 \Rightarrow 8n > 0 \Rightarrow 8n + 6 > 6 > 0 \Rightarrow 8n + 6 > 0 \underset{+n}{\Rightarrow} 9n + 6 > n \geq N$

$\Rightarrow 9n + 6 > N > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{9n+6} < \frac{1}{N} \underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{22} \Rightarrow \frac{1}{9n+6} < \frac{\varepsilon}{22} \Rightarrow \frac{22}{9n+6} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5n-4}{3n+2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{15n - 12 - 15n - 10}{3(3n+2)} \right| \quad \left| \frac{-22}{9n+6} \right| = \frac{22}{9n+6} < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{5n-4}{3n+2} = \frac{5}{3}.$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{-9}{4n-11} = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{9} > 0$, por la P. A. existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{9} \Rightarrow \frac{9}{N_1} < \varepsilon$.

Definimos $\boxed{N = \max\{N_1, 4\}}$ $\Rightarrow N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$ y $N \geq 4$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq 4$. P.D. $\left|\frac{-9}{4n-11} - 0\right| < \varepsilon$

Como $n \geq 4 \geq \frac{11}{3}$

$\Rightarrow n \geq \frac{11}{3} \Rightarrow 3n \geq 11 \Rightarrow 3n - 11 \geq 0 \Rightarrow 4n - 11 \geq n > 0$

(Dos formas de demostrar que $4n - 11 \geq n$)

Como $n \geq 4$

$\overset{3}{\Rightarrow} 3n \geq 12 \overset{-11}{\Rightarrow} 3n - 11 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow 3n - 11 \geq 0 \Rightarrow 4n - 11 \geq n$

$\Rightarrow 4n - 11 \geq n \geq N_1 \Rightarrow 4n - 11 \geq N_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{4n-11} \leq \frac{1}{N_1} \Rightarrow \frac{9}{4n-11} \leq \frac{9}{N_1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{9}{4n-11} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{-9}{4n-11} - 0\right| = \left|\frac{-9}{4n-11}\right| \underset{4n-11>0}{=} \frac{9}{4n-11} < \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{-9}{4n-11} = 0$$

$$\left|\frac{-9}{4n-11} - 0\right| = \left|\frac{-9}{4n-11}\right| \underset{\text{si } n \geq 3}{=} \frac{9}{4n-11} < \frac{9}{n} = 9\left(\frac{1}{n}\right) < 9\left(\frac{\varepsilon}{9}\right) = \varepsilon$$

Idea

$4n - 11 \geq n$

$\Leftrightarrow 4n - n \geq 11$

$\Leftrightarrow 3n \geq 11$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{11}{3}$

$\boxed{n \geq 4}$ ✓

$\boxed{\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{9}}$

P. A. aplicada a $\frac{\varepsilon}{9}$ ✓

⑤ $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+3}{-2n+7} = -3 \leftarrow \frac{6}{-2}$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\frac{\varepsilon}{24} > 0$, por la P. A. existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{24} \Rightarrow \frac{24}{N_1} < \varepsilon$.

Definimos $\boxed{N = \max\{N_1, 7\}} \Rightarrow N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$ y $N \geq 7$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow n \geq N_1$ y $n \geq 7$.

Como $n \geq 7 \Rightarrow n - 7 \geq 0 \overset{+n}{\Rightarrow} 2n - 7 \geq n \geq N_1$

$\Rightarrow 2n - 7 \geq N_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2n-7} \leq \frac{1}{N_1} \overset{\cdot 24}{\Rightarrow} \frac{24}{2n-7} \leq \frac{24}{N_1} < \varepsilon$

porque $N_1 > 0$

$\Rightarrow \frac{24}{2n-7} < \varepsilon$.

Por otro lado, $2n - 7 > 0 \overset{(-1)}{\Rightarrow} -2n + 7 < 0$

$\Rightarrow |-2n+7| = -(-2n+7) = 2n - 7$

$$\Rightarrow \left|\frac{6n+3}{-2n+7} - (-3)\right| = \left|\frac{6n+3}{-2n+7} + 3\right| = \left|\frac{6n+3-6n+21}{-2n+7}\right| = \left|\frac{24}{-2n+7}\right|$$

$$= \frac{|24|}{|-2n+7|} = \frac{24}{2n-7} < \varepsilon$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{6n+3}{-2n+7} = -3$

* Si $n \geq 4 \Rightarrow -2n + 7 < 0$

$\Rightarrow |-2n+7| = -(-2n+7)$

$= 2n - 7$

Idea

$2n - 7 \geq n$

$\Leftrightarrow \boxed{n \geq 7}$

$\frac{24}{2n-7} \leq \frac{24}{n}$

$= 24\left(\frac{1}{n}\right) < 24\left(\frac{\varepsilon}{24}\right)$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$