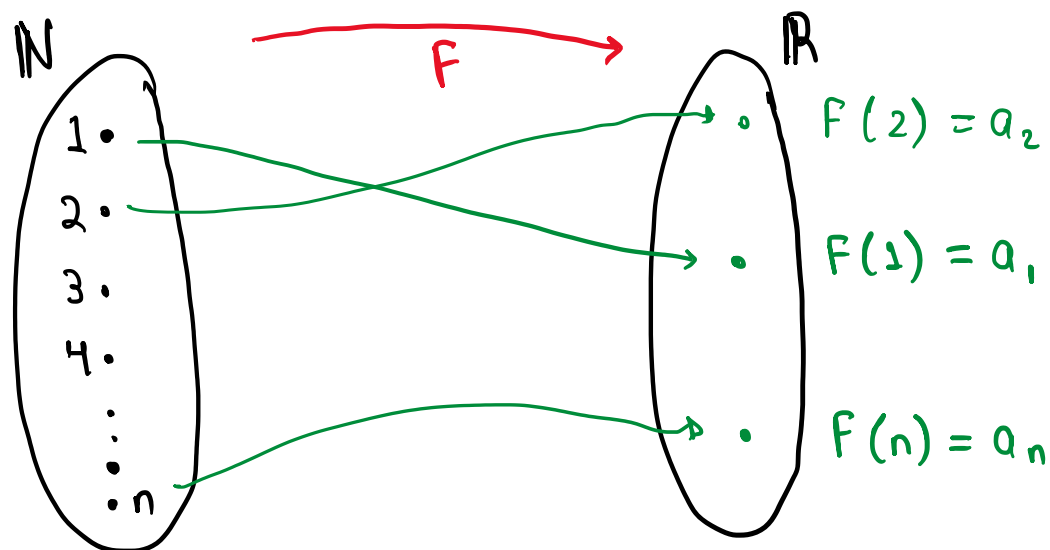


Sucesiones

viernes, 29 de octubre de 2021

Definición. Una sucesión en un conjunto A es una Función $F: \mathbb{N} \rightarrow A$ (con dominio $\mathbb{N}$ y contradominio A).

Estudiaremos las sucesiones de números reales o sucesiones en $\mathbb{R}$.



Si $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión, para cada $n \in \mathbb{N}$ llamaremos a_n a la imagen del número natural n , es decir, $a_n = F(n)$.

A la sucesión la escribiremos como

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots), \quad (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$\bullet (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

$$\circ (a_n) \quad (\text{cuando se sobreentienda que } n \in \mathbb{N})$$

Ejemplos:

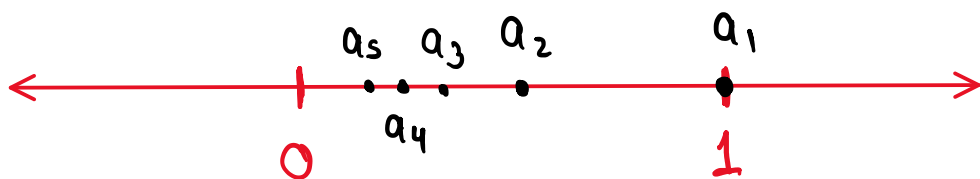
$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_1 = 1$$

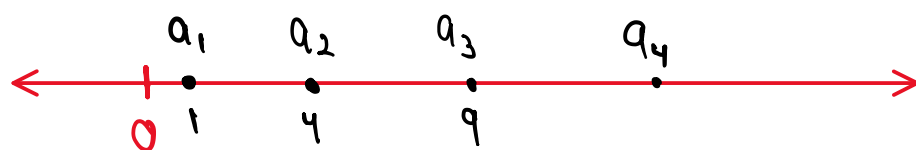
$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

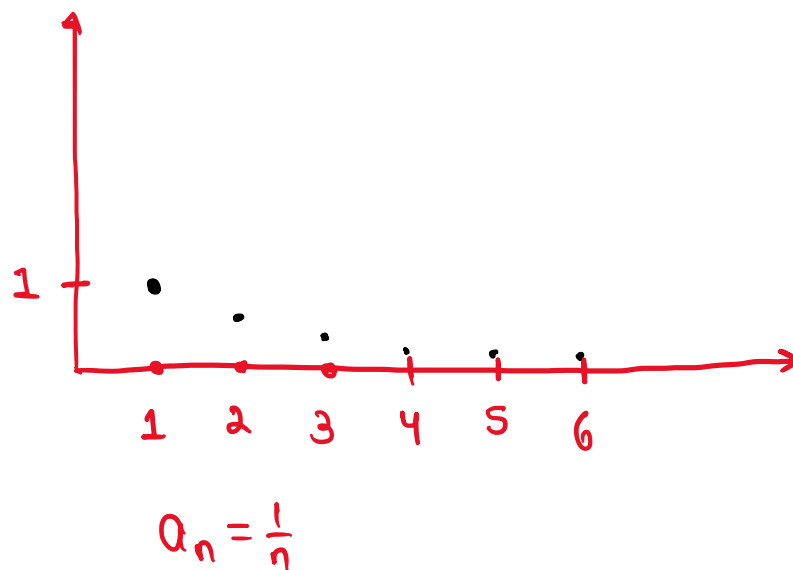
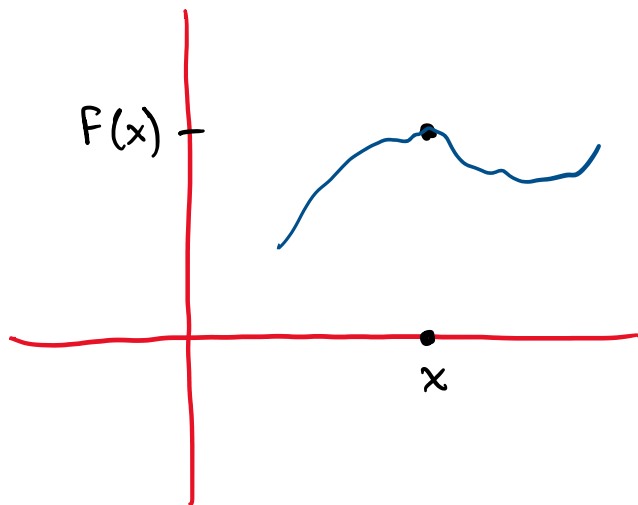
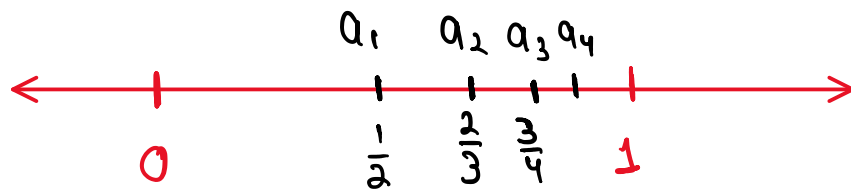
$$a_n = \frac{1}{n} \leftarrow \text{término general}$$



$$(1, 4, 9, 16, \dots) = (n^2)_{n \in \mathbb{N}}$$



$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$



* Todas las sucesiones las consideraremos en el conjunto $\mathbb{R}$, es decir, al escribir "sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión", $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será una sucesión en $\mathbb{R}$.

Límite de una sucesión

Definición. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$.

Diremos que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L (o que L es el límite de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$) si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$: si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

Notación:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

$$(a_n) \rightarrow L$$

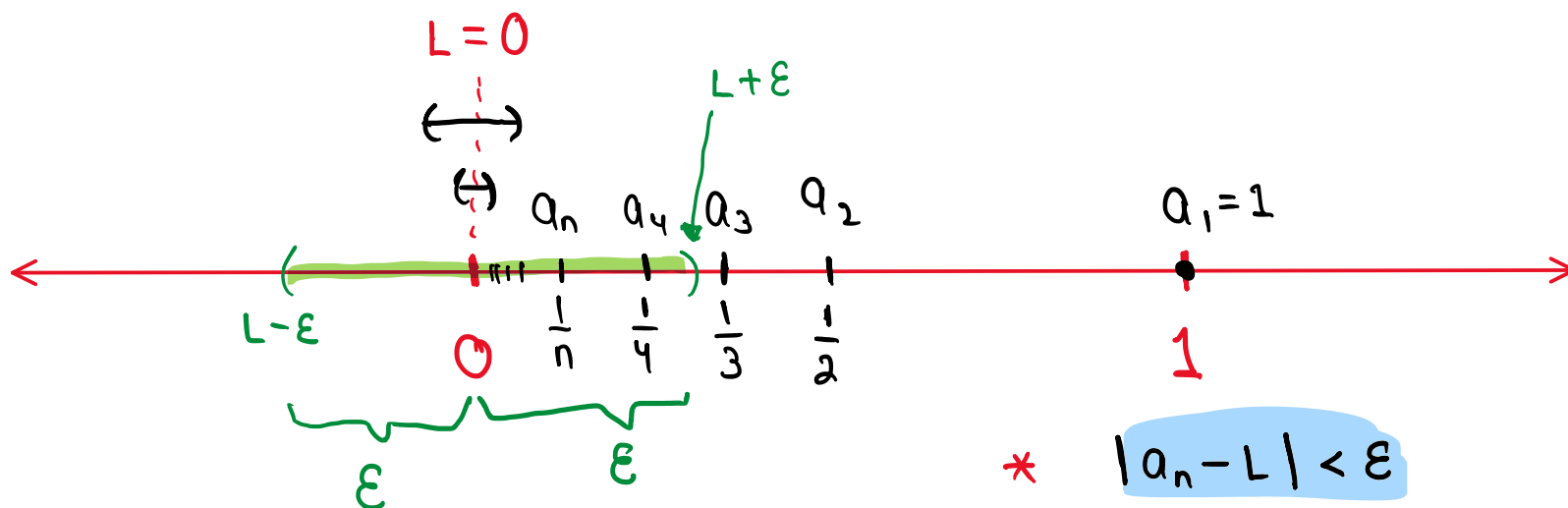
$$a_n \rightarrow L$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

* N es un índice a partir del cual se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$

* N depende de ε . En ocasiones se escribe $N(\varepsilon)$.

$\uparrow$
N que depende de ε



$$* |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

Recordatorio:

- Por la Propiedad Arquimедiana, $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

Ejemplo:

- ① La sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
(en este caso, $L=0$).

Demostración.

- Sea $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimедiana, existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

- Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$.

P.D. $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Como $0 < N \leq n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Queremos que
 $\forall n \geq N$:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$$

$$|\frac{1}{n}| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

