

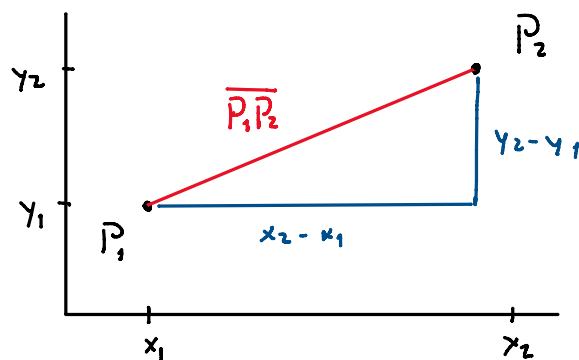
Periodo de funciones y función inversa

martes, 9 de noviembre de 2021

- ~ Si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
la distancia entre P_1 y P_2
está dada por

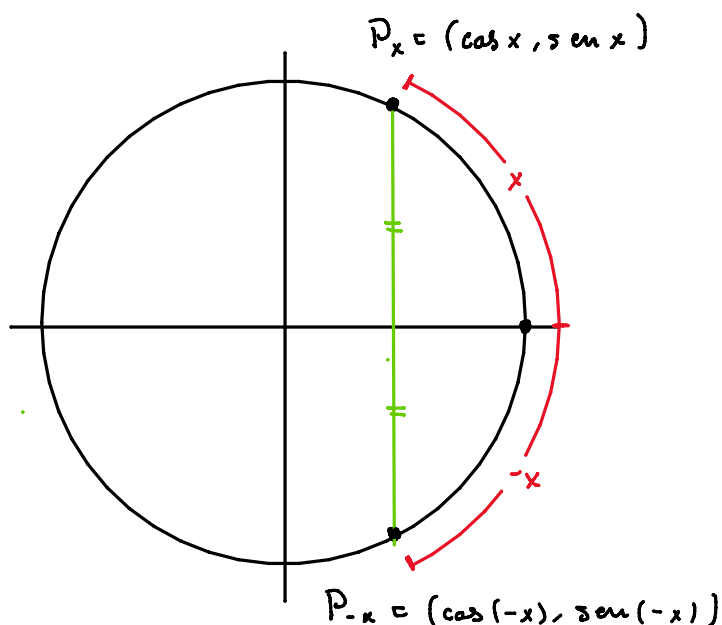
$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow \overline{P_1 P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



- ~ Si $x \in \mathbb{R}$, entonces el punto
 $P_x = (\cos x, \sin x)$ está sobre la
circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$



- ~ Por definición, el punto
 $P_{-x} = (\cos(-x), \sin(-x))$ recorre la
misma distancia que P_x sobre la
circunferencia pero en sentido contrario

$$\Rightarrow \boxed{\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{y} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

caseno es función par y el seno es impar

Teorema. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

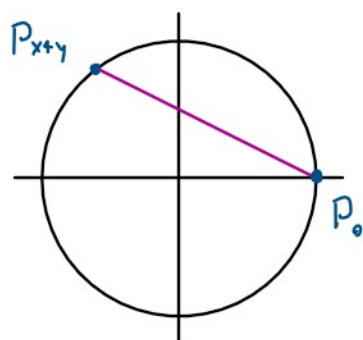
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y),$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x).$$

Dem. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y consideremos las puntas $P_0 = (1, 0)$ y

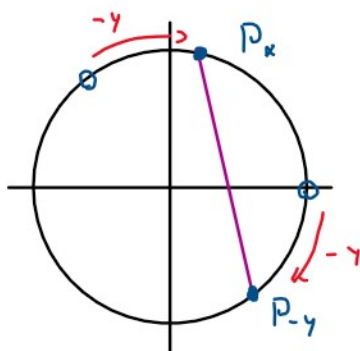


$$P_{x+y} = (\cos(x+y), \operatorname{sen}(x+y))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{P_0 P_{x+y}}^2 &= (\cos(x+y) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(x+y) - 0)^2 \\ &= \cos^2(x+y) - 2\cos(x+y) + 1 + \operatorname{sen}^2(x+y) \\ &= 1 - 2\cos(x+y) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{P_0 P_{x+y}}^2 = 2 - 2\cos(x+y)$$

Luego, $P_{(x+y)-y} = P_x = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ y $P_{0-y} = P_y = (\cos(y), \operatorname{sen}(y))$.



Ya que estamos desplazando P_{x+y} y P_0 la misma distancia en el mismo sentido,

se cumple que

$$\overline{P_{-y} P_x}^2 = \overline{P_0 P_{x+y}}^2 = 2 - 2\cos(x+y) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } \overline{P_{-y} P_x}^2 &= (\cos(x) - \cos(-y))^2 + (\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(-y))^2 \\ &= (\cos(x) - \cos(y))^2 + (\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y))^2 \\ &= \cos^2(x) - 2\cos(x)\cos(y) + \cos^2(y) \\ &\quad + \operatorname{sen}^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}^2(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{P_{-y} P_x}^2 = 2 - 2\cos(x)\cos(y) + 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 2 - 2\cos(x+y) = 2 - 2\cos(x)\cos(y) + 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\Rightarrow -2\cos(x+y) = -2\cos(x)\cos(y) + 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

Como **coseno es par** y **seno es impar**, se sigue que

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(-y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(-y)$$

$$= \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) [-\operatorname{sen}(y)]$$

$$= \cos(x) \cos(y) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) .$$

Aplicando estas dos a $z - \frac{\pi}{2}$ y $z + \frac{\pi}{2}$ con $z \in \mathbb{R}$, para que

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(z) \quad \text{y} \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(z) .$$

De estas deducimos que

$$\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(z) .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) &= \cos\left(x+y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(x) \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(x) \operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x) [-\cos(y)] \\ &= \operatorname{sen}(y) \cos(x) + \operatorname{sen}(x) \cos(y) \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(y) \cos(x) .$$

Corolario. $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ p. c. $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$.

Dem. Ejercicio ■

Ejercicios. Pruebe que las siguientes funciones son periódicas y determine su periodo:

1) $f(x) = \cos(x - 3\pi)$;

2) $g(x) = \operatorname{sen}(5x)$.

$p > 0$ es periodo de f si $f(x+p) = f(x)$
p. c. $x \in \operatorname{dom}(f)$ y p es el menor
número positivo con esta propiedad

Sol. 1) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos((x+2\pi) - 3\pi) \\ &= \cos((x-3\pi) + 2\pi) \end{aligned}$$

$$= \cos(x - 3\pi)$$

$$= f(x)$$

coseno tiene periodo 2π

$$\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$\Rightarrow f$ es periódica.

P.D. f tiene periodo 2π .

Supongamos por contradicción que existe $a \in (0, 2\pi)$ tal que

$$f(x+a) = f(x) \quad \text{p.c. } x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(x+3\pi+a) = f(x+3\pi)$$

$$= \cos((x+3\pi) - 3\pi)$$

$$= \cos(x)$$

$$, \quad f(x+3\pi+a) = f(x+a+3\pi)$$

$$= \cos((x+a+3\pi) - 3\pi)$$

$$= \cos(x+a)$$

$$\Rightarrow \cos(x+a) = \cos(x) \quad \text{p.c. } x \in \mathbb{R}, \text{ con } 0 < a < 2\pi \quad \text{!}$$

Esto pues coseno tiene periodo 2π .

$\therefore f$ tiene periodo 2π .

2) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$g\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \sin(5x + 2\pi)$$

seno tiene periodo 2π

$$= \sin(x)$$

$$= g(x)$$

$\Rightarrow g$ es periódica.

P.D. g tiene periodo $\frac{2\pi}{5}$

Supongamos por contradicción que existe $a \in (0, \frac{2\pi}{5})$ tal que

$$g(x+a) = g(x) \quad \text{p.c. } x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x}{5} + a\right) = g\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
 g(x+a) &= g\left(\frac{x}{5} + a\right) \quad \text{p.c. } x \in \mathbb{R}. \\
 \Rightarrow g\left(\frac{x}{5} + a\right) &= g\left(\frac{x}{5}\right) \\
 &= \sin\left(5\left(\frac{x}{5}\right)\right) \\
 &= \sin(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma \quad g\left(\frac{x}{5} + a\right) &= \sin\left(5\left(\frac{x}{5} + a\right)\right) \\
 &= \sin(x + 5a)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(x + 5a) = \sin(x) \quad \text{p.c. } x \in \mathbb{R} \quad \text{con } 0 < 5a < 2\pi \quad \nabla$$

Esto pues el seno tiene periodo 2π

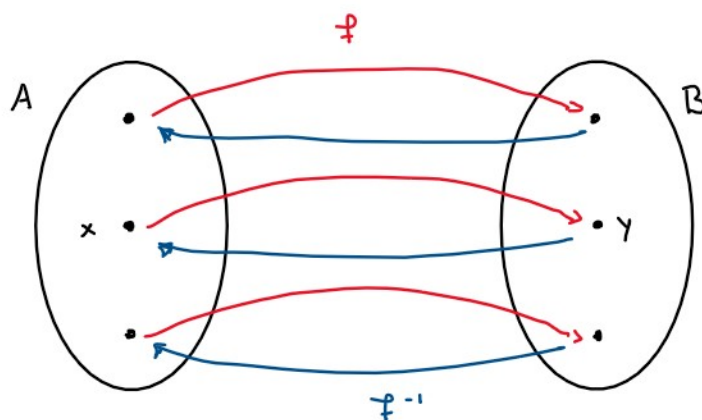
$$\therefore g \text{ tiene periodo } \frac{2\pi}{5}.$$

Función inversa.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función biyectiva, es decir, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$ (inyectividad) y para cada $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ ($\text{Im}(f) = \text{codom}(f)$, suprayectividad).

En otras palabras, para cada $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Definimos la función inversa de f , denotada por $f^{-1}: B \rightarrow A$, como $f^{-1}(y) = x$.



$$x \xrightarrow{f} y$$

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x$$

$$\text{Notemos que } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \Rightarrow$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}$$

Ejemplos.

1) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x + 7$.

Sabemos que f es biyectiva, es decir, para cada $y \in \mathbb{R} = \text{Im}(f)$

existe $x \in \text{Dom}(f)$ t.q. $y = f(x) = 2x + 7$

$$\Leftrightarrow y - 7 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y - 7}{2}$$

La función $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f^{-1}(y) = \frac{y - 7}{2}$,

por lo

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 7)$$

$$= \frac{(2x + 7) - 7}{2}$$

$$= x \quad \checkmark$$

2) Sea $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida como $g(x) = x^2$

Sabemos que g es biyectiva, y su inversa $g^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

está dada por $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Si $x \in [0, \infty)$ ($x \geq 0$), entonces

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^2)$$

$$= \sqrt{x^2}$$

$$= |x|$$

$$= x$$

$x \geq 0$

Ejercicio. Calcular el dominio y la imagen de f y f^{-1} si:

1) $f(x) = \frac{x}{5x - 2}$;

2) $g(x) = \frac{3x - 1}{4x + 1}$.

Sol 1) Notemos que $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 5x-2 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

~ Ahora bien, sea $y \in \text{Im}(f)$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ p.a. } x \in \text{Dom}(f)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{5x-2}$$

$$\Leftrightarrow (5x-2)y = x$$

$$\Leftrightarrow 5xy - 2y = x$$

$$\Leftrightarrow x(5y-1) = 5xy - x = 2y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2y}{5y-1}, \quad 5y-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \neq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

Se comprueba que $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$ es biyectiva (ejerc.)

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y}{5y-1}, \quad \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \quad \text{y} \quad \text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}.$$

$$2) g(x) = \frac{3x-1}{4x+1}$$

~ Notemos que $g(x)$ existe $\Leftrightarrow 4x+1 \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

~ $y \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow y = g(x) \text{ p.a. } x \in \text{Dom}(g)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{4x+1}$$

$$\Leftrightarrow (4x+1)y = 3x-1$$

$$\Leftrightarrow 4xy + y = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4xy - 3x = -y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{4y-3}, \quad 4y-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \neq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(g) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\}$$

Se comprueba que $g: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\}$ es biyectiva

$$\Rightarrow \text{Dom}(g^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{4} \right\}, \quad \text{Im}(g^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4} \right\} \quad y$$

$$g^{-1}(y) = \frac{-y-1}{4y-3} = \frac{y+1}{3-4y}.$$

Ejercicio. Resuelve $|-x+4| \leq |3x-5|$

Sol. $|-x+4| \leq |3x-5|$

$$\Leftrightarrow -|3x-5| \leq -x+4 \leq |3x-5|$$

$$c > 0 \Rightarrow (|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c)$$

$$\Leftrightarrow -|3x-5| \leq -x+4 \quad y \quad -x+4 \leq |3x-5|$$

$$\Leftrightarrow |3x-5| \geq x-4 \quad y \quad |3x-5| \geq -x+4$$

$$|a| \geq c \Leftrightarrow \begin{matrix} a \geq c \\ \vee \\ a \leq -c \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 3x-5 \geq x-4 \quad \vee \quad 3x-5 \leq -(x+4) \quad , \quad y$$

$$3x-5 \geq -x+4 \quad \vee \quad 3x-5 \leq -(-x+4)$$

Otra manera:

$$a, b \geq 0 \Rightarrow (a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2)$$

$$|-x+4| \leq |3x-5| \Leftrightarrow |-x+4|^2 \leq |3x-5|^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-x+4)^2}^2 \leq \sqrt{(3x-5)^2}^2 \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

$$\Leftrightarrow (-x+4)^2 \leq (3x-5)^2$$