

Ejercicios de funciones

martes, 26 de octubre de 2021

Definición. Sean f y g funciones en $\mathbb{R}$ (sus dominios y codominios están en $\mathbb{R}$). Definimos las funciones:

$$\sim f+g \quad \text{como} \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\sim f-g \quad \text{como} \quad (f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$\sim fg \quad \text{como} \quad (fg)(x) := f(x)g(x)$$

$$\sim \frac{1}{g} \quad \text{como} \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) := \frac{1}{g(x)}$$

$$\sim \frac{f}{g} \quad \text{como} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Notemos que

$$\text{dom}(f+g) = \text{dom}(f-g) = \text{dom}(fg) = \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g),$$

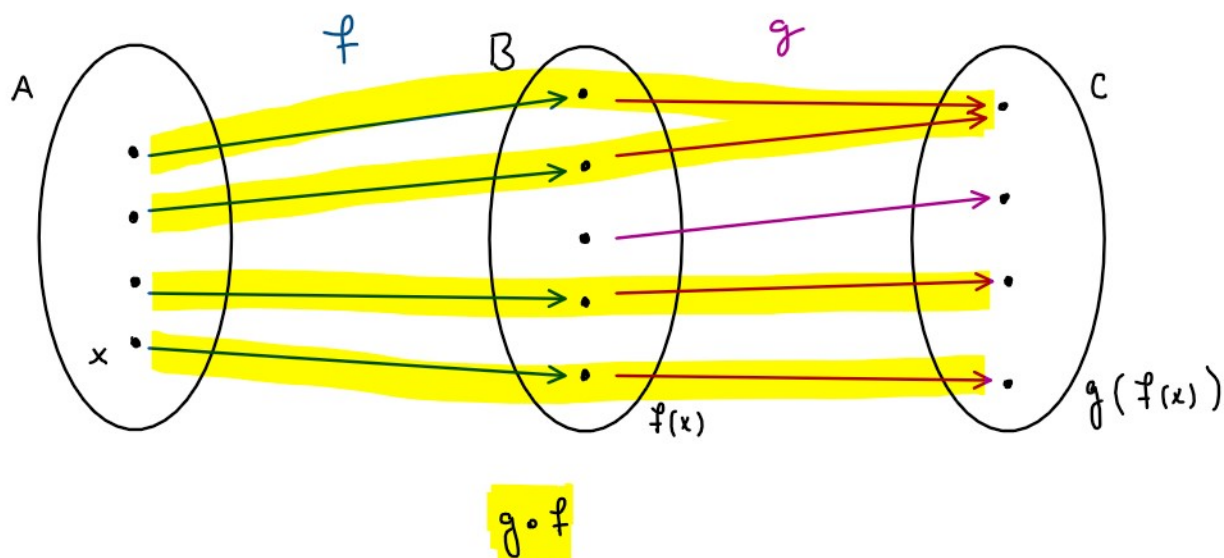
$$\text{dom}\left(\frac{1}{g}\right) = \text{dom}(g) \setminus \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) = 0\} \quad \text{y}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)] \setminus \{x \in \text{dom}(g) \mid g(x) = 0\}$$

Definición. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones. Definimos la función **composición de f y g** , denotada por

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad \text{como}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$



Ejemplos.

~ Si: $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

~ Si: $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = 3x+2$, entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = 3 \sin(x) + 2$$

Por otro lado,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = \sin(3x+2)$$

Observación. En general, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

Ejercicio. Sean f y g funciones en $\mathbb{R}$. Falso o verdadero con argumento:

- 1) si f y g son suprayectivas, entonces $f+g$ es suprayectiva;
- 2) si f y g son crecientes, entonces $f+g$ es creciente;
- 3) si f y g son crecientes, entonces $g \circ f$ es creciente.

Sol 1) Falso

Definimos $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = -x$$

f y g son suprayectivas, pero $f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + (-x) = 0,$$

es decir, $f+g$ es la función constante 0, que no es suprayectiva en $\mathbb{R}$.

2) Verdadero.

Sean f y g funciones en $\mathbb{R}$ crecientes

$$\text{P.D. } x < y \Rightarrow (f+g)(x) \leq (f+g)(y)$$

Tomemos $x, y \in \text{dom}(f+g)$ tales que $x < y$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad y \quad g(x) \leq g(y) \quad (f, g \text{ crecientes})$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) \leq (f+g)(y)$$

$\therefore f+g$ es creciente

3) Verdadero.

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones crecientes, y sean $x, y \in A$ tales que $x < y$.

$$\text{P.D. } (g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$$

$$\text{Como } x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f \text{ creciente})$$

$$\text{Si } f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

$$\text{si } f(x) < f(y) \Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y)) \quad (g \text{ creciente})$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \leq g(f(y))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$$

$\therefore g \circ f$ es creciente.

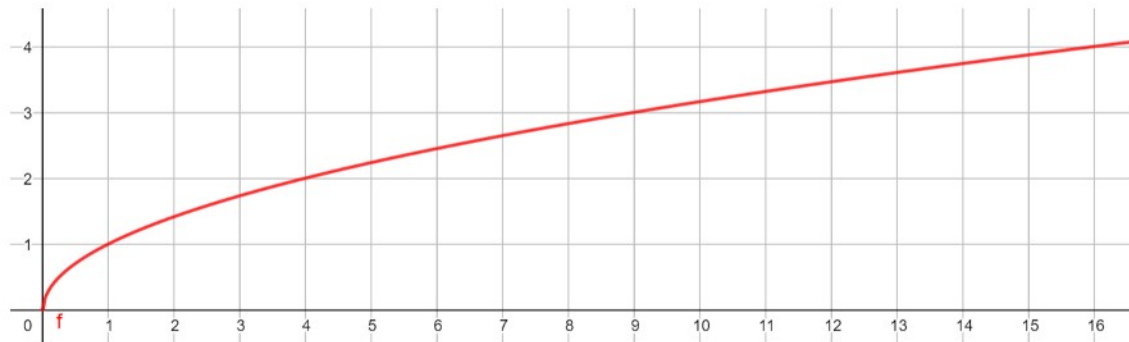
Definición. Sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \sqrt{x},$$

donde $\sqrt{x}$ es el único número en $[0, \infty)$ tal que

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x.$$

x	$\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4



Observaciones:

- 1) $\sqrt{x} \geq 0$ p.c. $x \in [0, \infty)$
- 2) $\sqrt{x}$ existe si y solo si $x \geq 0$.
- 3) $\sqrt{x} = 0$ si y solo si $x = 0$.

Dem 1) $\Rightarrow$ Supongamos por contradicción que $\sqrt{x}$ existe y $x < 0$

$$0 \leq (\sqrt{x})^2 = x < 0$$

($a^2 \geq 0$ p.c. $a \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow 0 < 0 \quad \text{!}$$

$$\therefore x \geq 0$$

Ejercicio. Determina el dominio de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \sqrt{14-5x}$

$$2) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{7-3x}}$$

$$\text{Sol. } 1) x \in \text{dom}(f) \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{14-5x} \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow 14-5x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 14 \geq 5x \quad 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 14 \geq \frac{1}{5} \cdot 5x \quad \frac{1}{5} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{14}{5}$$

$$\therefore \text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{14}{5}\} = (-\infty, \frac{14}{5}]$$

$$2) f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{7-3x}}$$

$$x \in \text{dom}(f) \Leftrightarrow f(x) \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7-3x} \text{ existe y es distinto de } 0.$$

$$\Leftrightarrow 7-3x > 0$$

$$\Leftrightarrow 7 > 3x \quad 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 7 > \frac{1}{3} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$$

$$\therefore \text{dom}(f) = (-\infty, \frac{7}{3}]$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+6x+9}}$$

$$x \in \text{dom}(f) \Leftrightarrow f(x) \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4} \text{ existe y } \sqrt{x^2+6x+9} \text{ existe y } \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x+4 \geq 0 \quad \text{y} \quad x^2+6x+9 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -4 \quad \text{y} \quad (x+3)^2 > 0$$

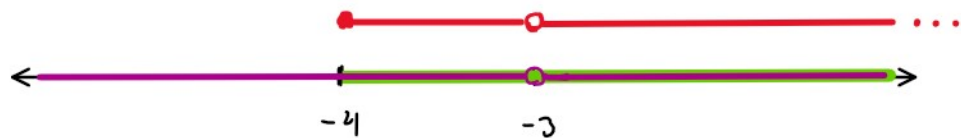
$$\Leftrightarrow x \in [-4, \infty) \quad \vee \quad x+3 > 0 \quad \circ \quad x+3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \quad \vee \quad x > -3 \quad \circ \quad x < -3$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4, \infty) \quad \vee \quad x \in (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$$

$$\Leftrightarrow x \in [-4, \infty) \cap [(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)]$$

$$\therefore \text{dom}(f) = [-4, -3) \cup (-3, \infty)$$



Ejercicio. Determina el dominio y el contradominio para que la función $f(x) = -7x^2 + G$ sea biyectiva.

Sol. Definimos $f: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, G]$ como

$$f(x) = -7x^2 + G$$

~ P.D. f es inyectiva.

Sean $x, y \in [0, \infty)$ tales que $x \neq y$

Por tricotomía, supongamos que $x < y$

$$\Rightarrow 0 < x < y$$

$$0 < a < b \quad \vee \quad 0 < c < d$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 < y^2$$

$$\Rightarrow 0 < a < b$$

$$\Rightarrow -7x^2 > -7y^2$$

$$\Rightarrow -7x^2 + G > -7y^2 + G$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y)$$

Si $x > y$, se prueba similarmente que

$$f(x) < f(y)$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

$\therefore f$ es inyectiva

~ P.D. f es suprayectiva

Sea $y \in (-\infty, G] = \text{codom}(f)$.

Supongamos que $y = f(x)$ p.a. $x \in [0, \infty)$

$$\Leftrightarrow y = -7x^2 + G \leq G$$

$$\Leftrightarrow y - G = -7x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow G - y = 7x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{G - y}{7} = x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{G - y}{7}} = \sqrt{x^2} \geq 0$$

Consideremos $x = \sqrt{\frac{G - y}{7}} \in [0, \infty)$. Se sigue que

$$f(x) = y$$

$\Rightarrow f$ es suprayectiva

$\therefore f$ es biyectiva.