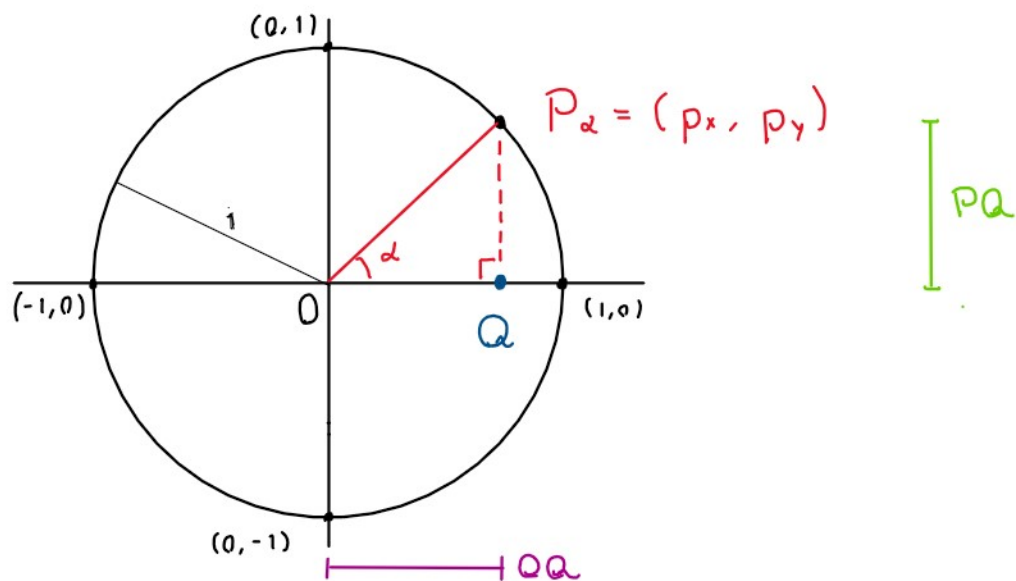


Funciones trigonométricas

jueves, 21 de octubre de 2021

Consideremos la circunferencia unitaria, es decir, la circunferencia de radio 1 con centro en $(0,0)$. Llamamos π al cociente del perímetro de esta circunferencia entre su diámetro.

Se cumple que $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $3 < \pi < 4$.



Tomemos $P_\alpha = (p_x, p_y)$ en esta circunferencia, y sea $Q = (p_x, 0)$. Llamamos α al ángulo interior del triángulo rectángulo OPQ anclado al vértice O .

Definimos el seno y el coseno del ángulo α como

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OP} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{OQ}{OP},$$

pero $OP = 1$ pues es radio de la circunferencia

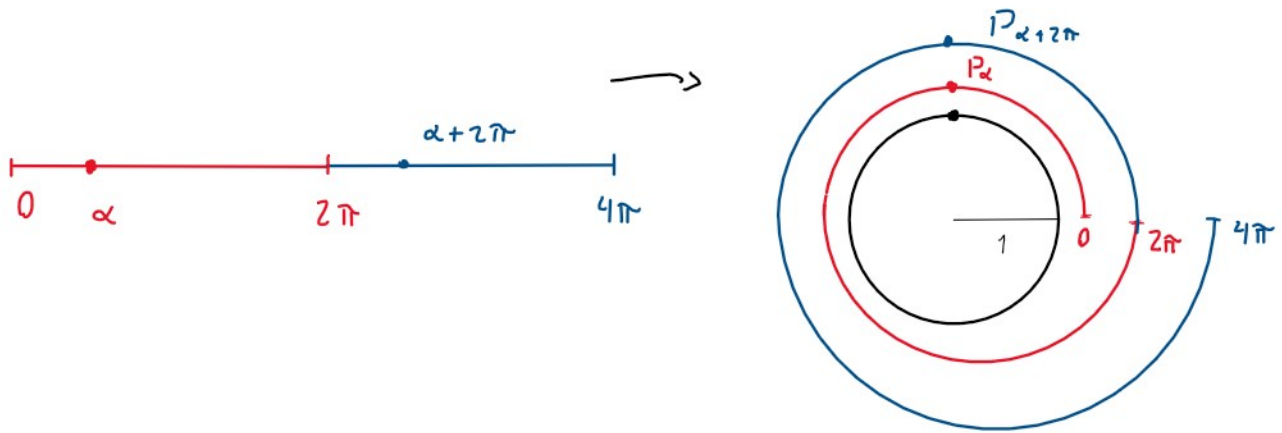
$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = PQ = p_y \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \alpha = OQ = p_x$$

Ya que la longitud de la circunferencia es 2π , tanto $[0, 2\pi]$ como $[2\pi, 4\pi]$ cubren la circunferencia. Si $\alpha \in [0, 2\pi]$, este se corresponde con $\alpha + 2\pi \in [2\pi, 4\pi]$, y así $P_\alpha = P_{\alpha+2\pi}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)$$

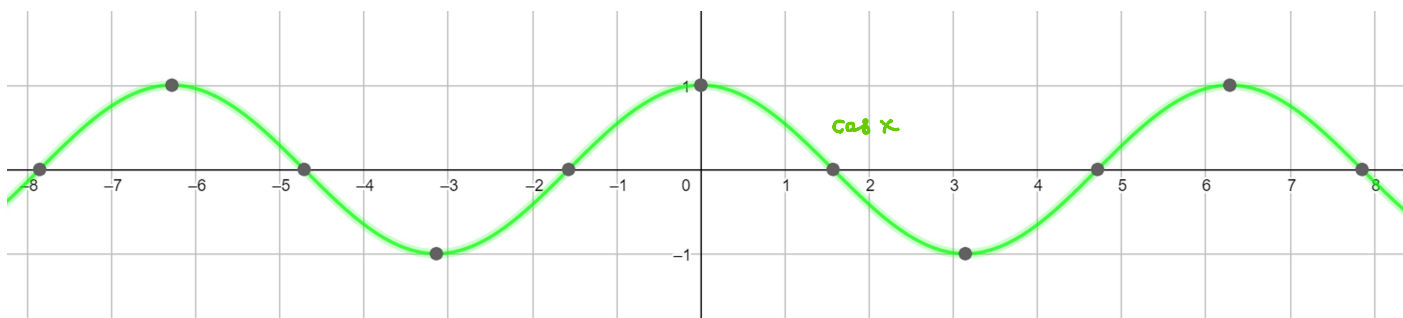
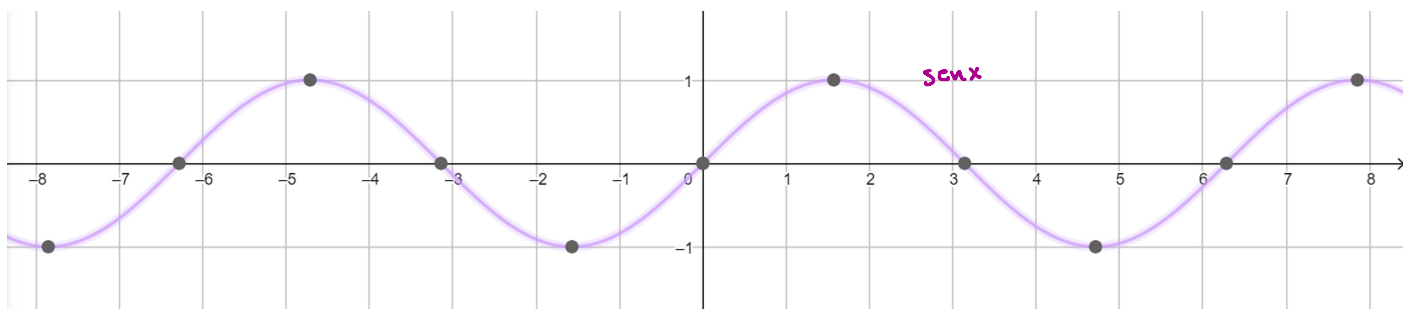
$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$$

En general, si $\alpha \in [0, 2\pi]$ entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$,
 $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha)$



De esta manera, definiremos las funciones $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como
 $\sin(x) = p_y$ y $\cos(x) = p_x$

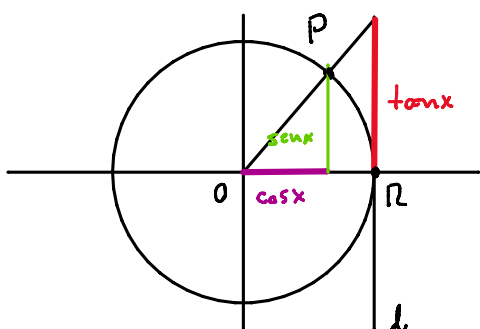
α	P_α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0	(1, 0)	0	1
$\frac{\pi}{2}$	(0, 1)	1	0
π	(-1, 0)	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	(0, -1)	-1	0
2π	(1, 0)	0	1
$-\frac{\pi}{2}$	(0, -1)	-1	0
$-\pi$	(-1, 0)	0	-1
$-\frac{3\pi}{2}$	(0, 1)	1	0
-2π	(1, 0)	0	1



Definimos la función tangente

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ como } \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

La función tangente no está definida en números de la forma $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ pues en estas se anula el coseno.

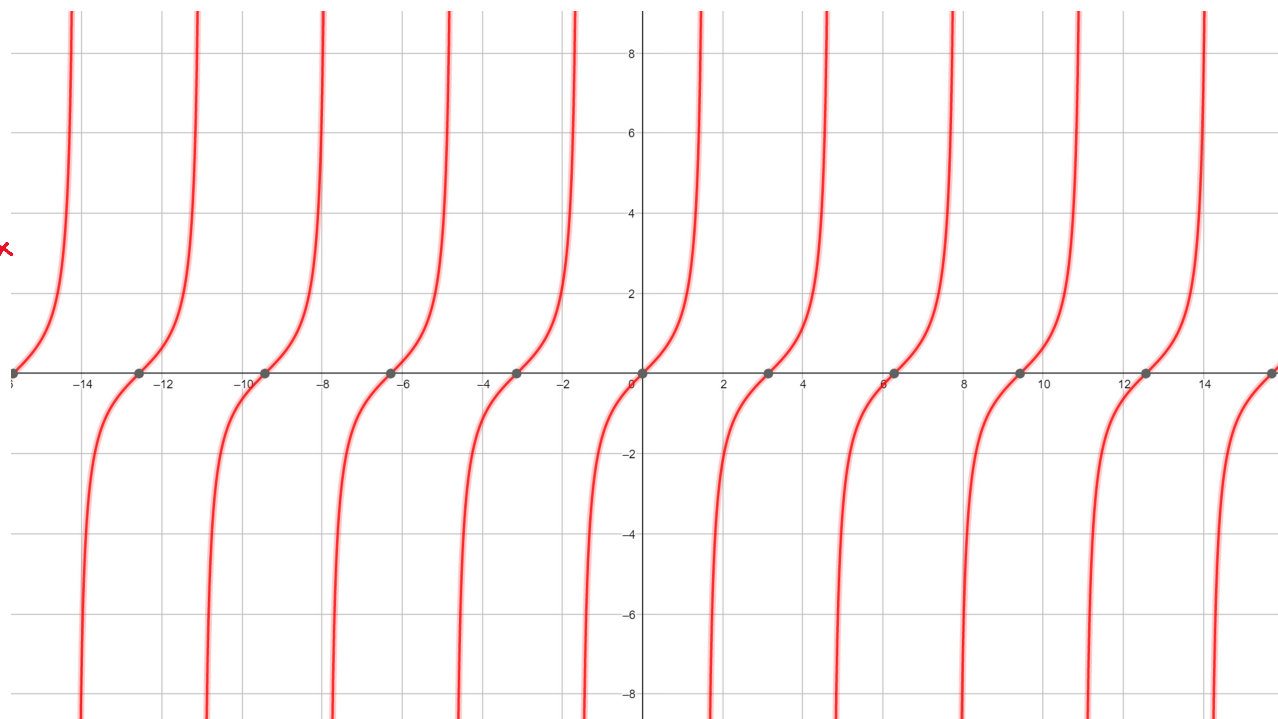


l paralela a la circunferencia.

Por triángulos semejantes:

$$\frac{\tan x}{\cancel{OR} \rightarrow 1} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\tan x$



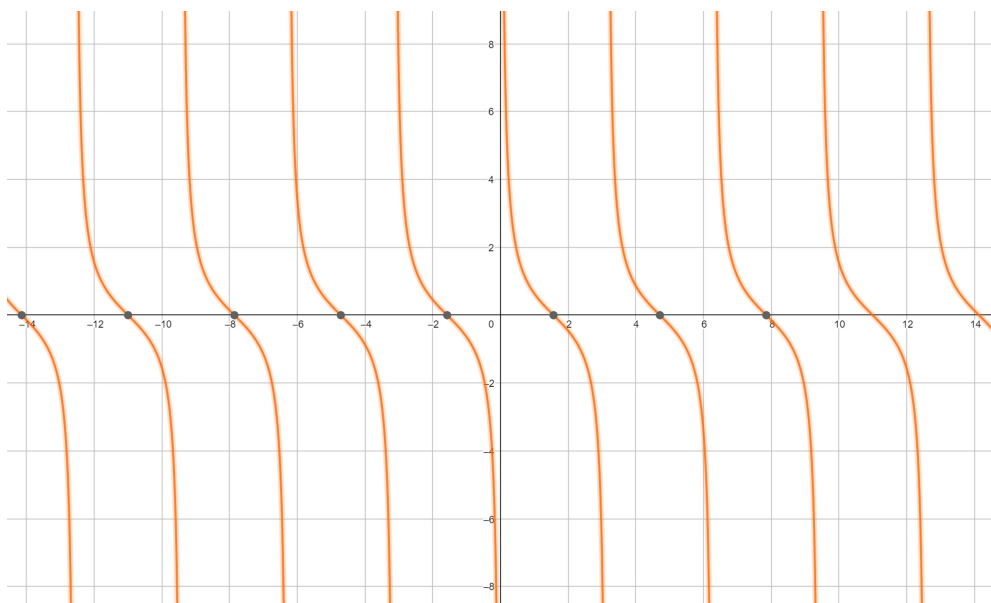
Definimos las funciones cotangente, secante y cosecante de la siguiente manera:

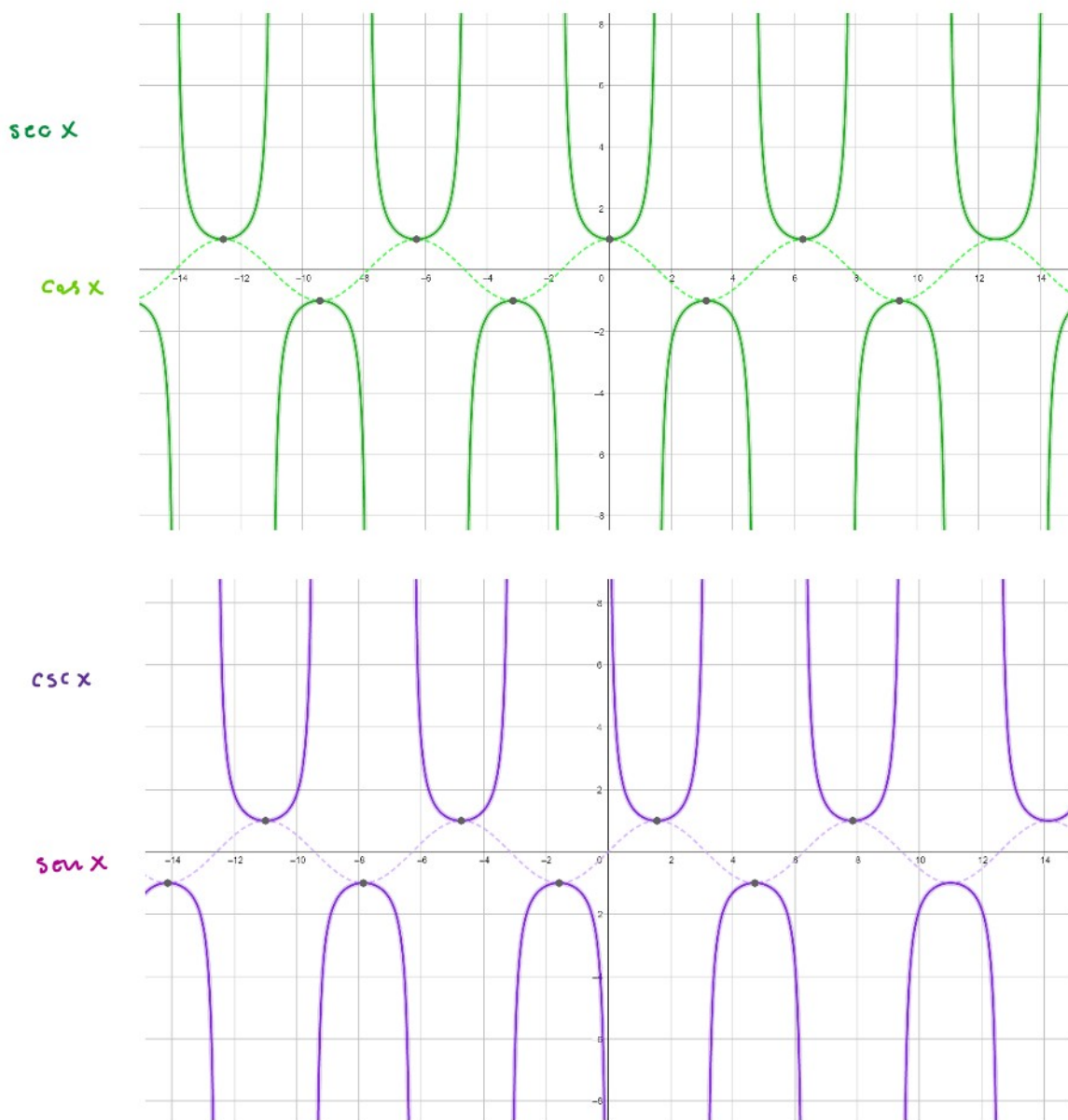
~ $\cot: \mathbb{R} \setminus \{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

~ $\sec: \mathbb{R} \setminus \{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

~ $\csc: \mathbb{R} \setminus \{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

$\cot x$





Definición. Sea $f: A \rightarrow B$. Decimos que:

- 1) f está acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K$ para cada $x \in A$.
- 2) f está acotada inferiormente si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq k$ para cada $x \in A$.
- 3) f está acotada si está acotada superior e inferiormente, o bien, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ p. c. $x \in A$.
 $(-M \leq f(x) \leq M)$

Ejemplos.

- ~ Las funciones seno y coseno están acotadas por 1 y -1.
- ~ Las funciones constantes están acotadas.
- ~ Las funciones x^2 y $|x|$ están acotadas inferiormente por 0.

Definición. Se dice que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ es **periódica** si existe $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Decimos que $p_0 > 0$ es el **periodo** de f si es el menor número positivo tal que $f(x+p_0) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Notemos que $4\pi > 0$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ pasa que $\sin(x+4\pi) = \sin(x)$ y $\cos(x+4\pi) = \cos(x)$
 $\Rightarrow$ seno y coseno son periódicos.

Sin embargo, 2π es el menor número positivo tal que $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ y $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
 $\therefore$ Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π .

Ejercicio. Dada la regla de correspondencia, determine el dominio y la imagen de la función.

1) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

- $\text{Dom}(f)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2x - 3 \neq 0$

Luego, $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

• $\text{Im}(f)$.

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow f(x) = y \quad \text{p.a. } x \in A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x-3} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2x-3}}{y} \cdot \frac{1}{\cancel{2x-3}} = \frac{2x-3}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y} \quad (\text{sup. } y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2y} + \frac{3}{2}$$

Luego, $f\left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{2}\right) = y$ con $\frac{1}{2y} + \frac{3}{2} \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow y \neq 0$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2) $f(x) = x^2 + 4$

• $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pues siempre existe $x^2 + 4$ p.a. $x \in \mathbb{R}$.

• $\text{Im}(f)$

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow f(x) = y \quad \text{p.a. } x \in \text{Dom}(f)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = y$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 = y - 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq y - 4$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq y$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = [4, \infty)$$

$y - 4$ es un cuadrado

$$\Leftrightarrow y - 4 > 0$$

si $y - 4 < 0$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 = y - 4 < 0 \quad \text{!}$$