

Funciones y gráficas de funciones

martes, 12 de octubre de 2021

Una función es una regla que a cada elemento de un conjunto les asigna un único elemento de otro conjunto.

Ejemplos.

1) Si la longitud de las aristas de un cubo miden l , el volumen el volumen del cubo es de l^3 .

2) A cada número x se le asigna el número $\frac{x^3 + 2x + 4}{x^2 + 1}$

3) Si a es un número irracional se le asigna el 0, y si a es racional se le asigna el 1.

4) Se relacionan los números

2 con 4

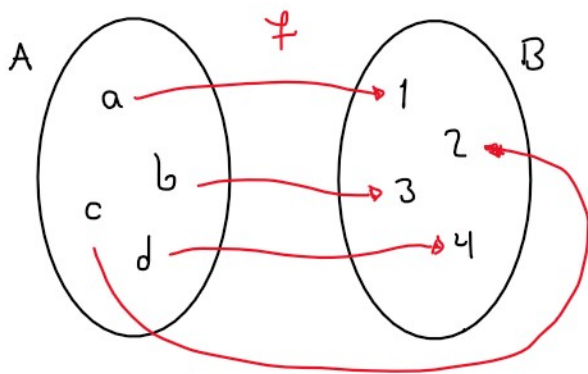
3 con 10

π con π^3

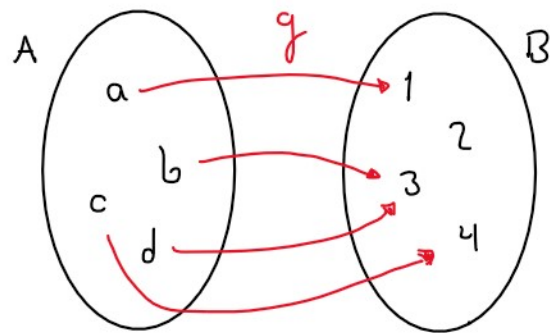
5 con $\frac{440}{3}$.

Definición. Se denomina función del conjunto A al conjunto B a una colección de pares de números, el primero en A y el segundo en B , con la siguiente propiedad: si (a, b) y (a, c) son pares de la colección entonces $b = c$, esto es, a cada elemento de A se le asigna un único elemento en B .

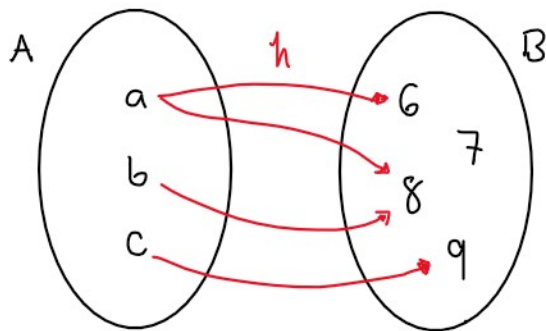
Ejemplos.



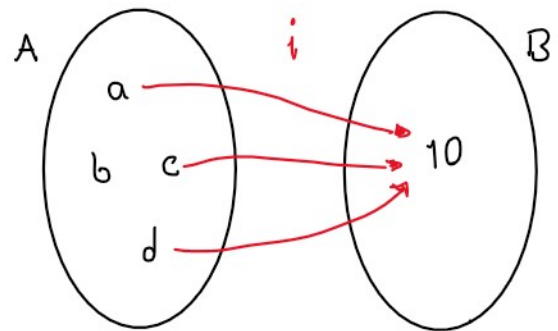
f **si** es función



g **si** es función



h **no** es función pues $a \in A$
está relacionada con dos
elementos distintos de B



i **no** es función pues $b \in A$
no está relacionado con
ningún elemento de B .

Una función entre A y B se designa mediante una letra $f, g, h, \dots$ y se denota por $f: A \rightarrow B$ (' f de A en B ').

Si $f: A \rightarrow B$, llamamos **dominio de f** , denotado por **$\text{dom}(f)$** , al conjunto **A** , mientras que **B** recibe el nombre de **codominio de f** , denotado por **$\text{codom}(f)$** .

Si $a \in A = \text{dom}(f)$, llamamos $f(a)$ (' f de a ') al único elemento en B tal que $(a, f(a))$ está en la función.

Ejemplos.

1) La función que a cada número le asigna su cubo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3$ para cada $x \in \mathbb{R} = \text{dom}(f)$
valor de x bajo f $\uparrow$ *variable*

2) La función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \frac{x^3 + 2x + 4}{x^2 + 1}$ p.c. $x \in \mathbb{R}$.

3) La función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

4) La función $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ definida por las parejas $(a, 1)$, $(b, 2)$, $(c, 4)$ y $(d, 3)$.

En este curso trabajaremos mayormente con funciones cuyas dominios y codominios sean subconjuntos de $\mathbb{R}$. A estas funciones se les llama **funciones reales de variable real**.

Gráfica de una función.

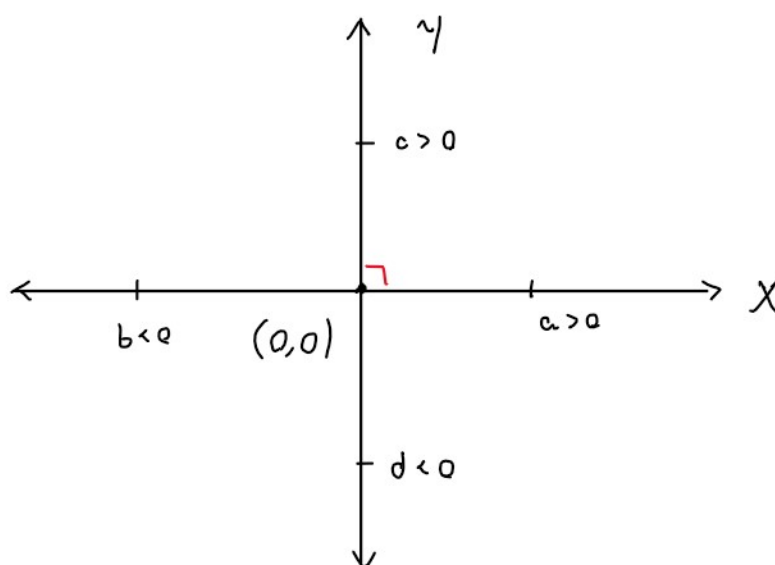
Decimos que una pareja $a, b \in \mathbb{R}$ es ordenada si se establece cuál de estas números es el primero y cual es el segundo. Por ejemplo, (a, b) es un par ordenado pues a es "la primer entrada" y b "la segunda". Así, dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$. Luego, definimos el conjunto

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

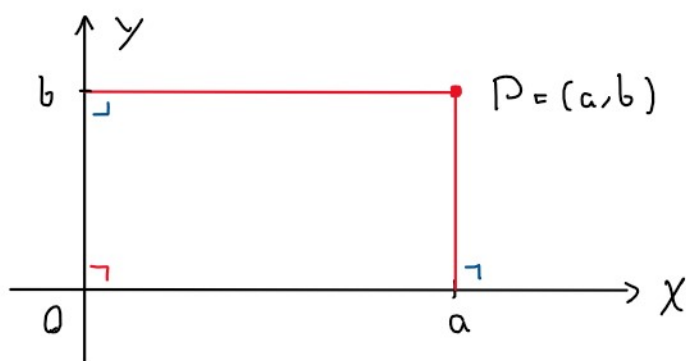
al que usualmente llamamos "plano" y a sus elementos "puntos".

Consideremos dos rectas ortogonales entre sí, una horizontal y otra

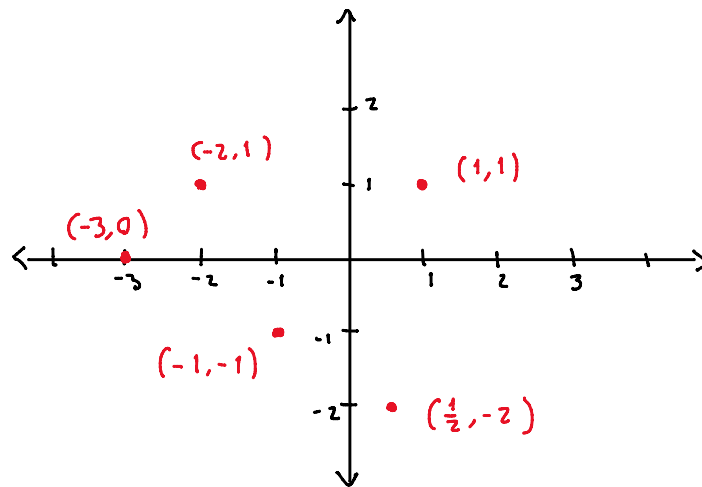
Consideremos dos rectas ortogonales entre sí, una horizontal y otra vertical. A la recta horizontal la llamamos **eje X** o eje de las abscisas y a la recta vertical la nombramos **eje Y** o de las ordenadas. Estas dos rectas se intersecan en el punto **$O = (0,0)$** , llamado origen. A esta disposición de $\mathbb{R}^2$ la llamamos **plano cartesiano**.



Para identificar un punto $P = (a,b)$ en este plano, localizamos a en el eje X (a la derecha de O si $a > 0$ o a la izquierda si $a < 0$) y a b en el eje Y (arriba de O si $b > 0$ o abajo si $b < 0$). Trazamos rectas paralelas a los ejes X y Y por a y b respectivamente, y la intersección de estas rectas será P .



Ejemplo. Localiza las puntas $(1,1)$, $(-2,1)$, $(-3,0)$, $(-1,-1)$ y $(\frac{1}{2}, -2)$ en el plano cartesiano.

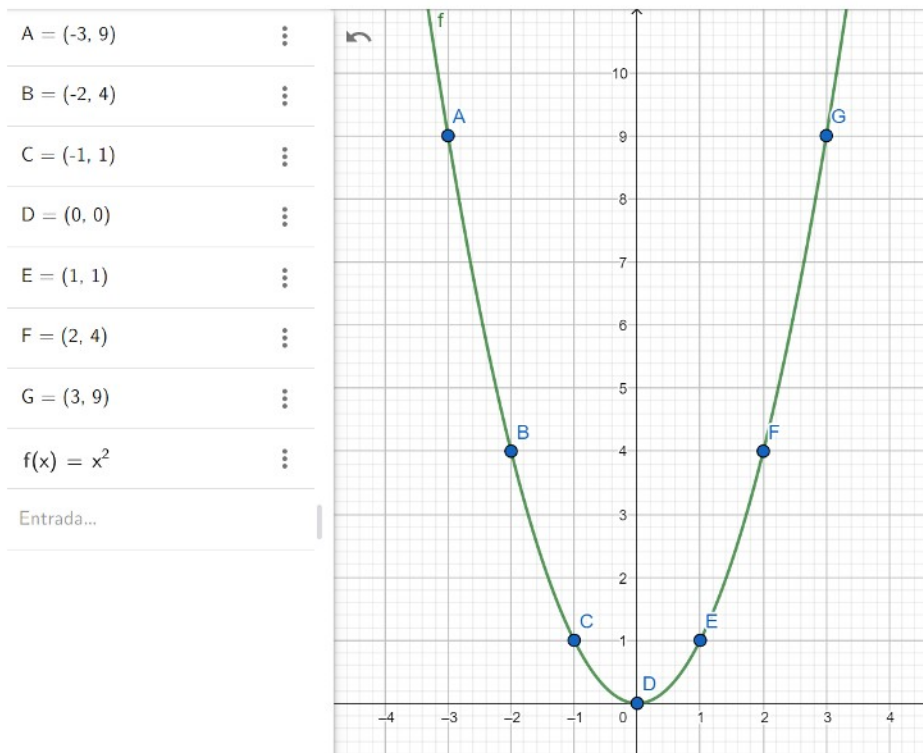


• ¿Cómo representamos funciones en $\mathbb{R}^2$?

Consideremos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Tabulamos algunos valores para x , sus respectivos $f(x)$ y $(x, f(x))$.

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$

Identificamos las parejas $(x, f(x))$ en el plano cartesiano y conectamos las puntas tratando de seguir su comportamiento.



Llamamos **gráfica de f** , denotada por G_f , al conjunto

$$G_f := \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \text{dom}(f) \}.$$