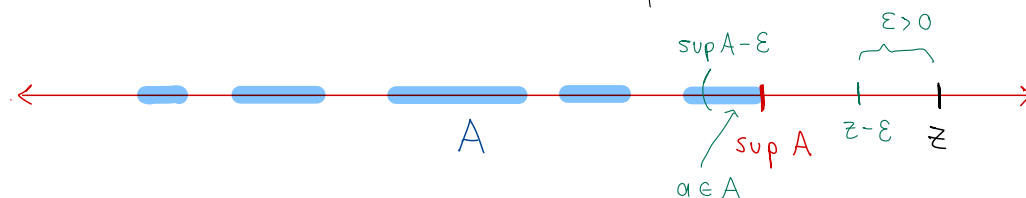


Resultados previos:

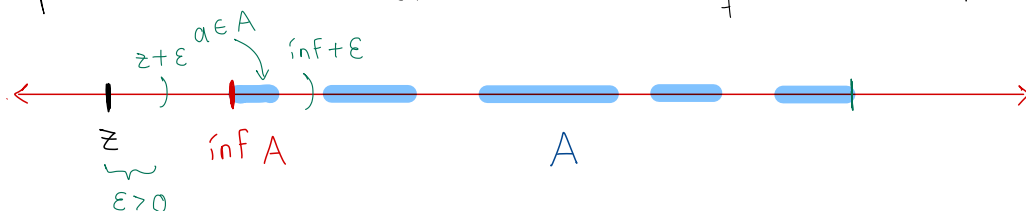
Teorema. Si z es una cota superior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, son equivalentes:

- i) $z = \sup A$ (z es la mínima cota superior de A);
- ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $z - \varepsilon < a$.



Teorema. Si z es una cota inferior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, son equivalentes:

- i) $z = \inf A$ (z es la máxima cota inferior de A);
- ii) para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < z + \varepsilon$.



Si $z \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, para demostrar que $z = \sup A$ basta probar que:

- 1) $\forall a \in A \quad a \leq z$ (z es cota superior de A), y
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad z - \varepsilon < a$

Si $z \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, para demostrar que $z = \inf A$ basta probar que:

- 1) $\forall a \in A \quad z \leq a$ (z es cota inferior de A), y
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < z + \varepsilon$.

Teorema 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente.

- i) Si A tiene elemento máximo, entonces $\sup(A) = \max(A)$.
- ii) Si $\sup(A) \notin A$, entonces A no tiene elemento máximo.

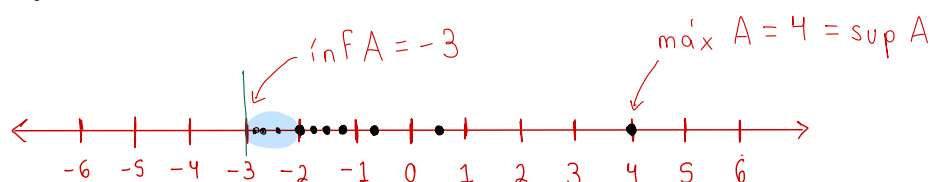
Teorema 2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente.

- i) Si A tiene elemento mínimo, entonces $\inf(A) = \min(A)$.
- ii) Si $\inf(A) \notin A$, entonces A no tiene elemento mínimo.

Determina si el siguiente conjunto está acotado superiormente o inferiormente, e indica cuál es su supremo, ínfimo, elemento máximo y mínimo, en caso de que estos elementos existan. Demuestra tus afirmaciones.

$$A = \left\{ -3 + \frac{7}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

n	$-3 + \frac{7}{n}$
1	$-3 + 7 = 4$
2	$-3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$
3	$-3 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3} = -0.\overline{6}$
4	$-3 + \frac{7}{4} = -\frac{5}{4} = -1.25$
700	$-3 + \frac{7}{700} = -\frac{299}{100} = -2.99$



- A está acotado superiormente
- $\max(A) = 4$
- $\sup(A) = 4$
- A está acotado inferiormente
- A no tiene elemento mínimo
- $\inf(A) = -3$

• Mostraremos que $\max A = 4$

P.D. i) $4 \in A$

ii) $\forall a \in A \quad a \leq 4$ (4 es cota superior de A)

i) Como $1 \in \mathbb{N}$, entonces $-3 + \frac{7}{1} = 4 \in A$.

ii) Sea $a \in A$ (P.D. $a \leq 4$)

$\Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = -3 + \frac{7}{n}$

Como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{7}{n} \leq 7$

$\Rightarrow -3 + \frac{7}{n} \leq -3 + 7 \Rightarrow a \leq 4$

$\therefore \max A = 4$ y A está acotado superiormente.

Además, por el Teorema 1-i) sabemos que $\sup A = \max A = 4$.

• Ahora probaremos que $\inf A = -3$

P.D. i) $\forall a \in A \quad -3 \leq a$ (-3 es cota inferior de A)

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < -3 + \varepsilon$

i) Sea $a \in A \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = -3 + \frac{7}{n}$. (P.D. $-3 \leq a$)

$$\text{Como } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0 \Rightarrow \frac{7}{n} > 0 \Rightarrow -3 + \frac{7}{n} > -3$$

$$\therefore \forall a \in A \quad -3 \leq a.$$

ii) P.D. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < -3 + \varepsilon$
 $-3 + \frac{7}{n} < -3 + \varepsilon$
 $\frac{7}{n} < \varepsilon$
 $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{7}$

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{7} > 0.$$

Por un corolario de la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow \frac{7}{m} < \varepsilon \Rightarrow -3 + \frac{7}{m} < -3 + \varepsilon.$$

Sea $a = -3 + \frac{7}{m}$. Como $m \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in A$. Además, $a < -3 + \varepsilon$.

Por i) y ii) concluimos que $\inf A = -3$ (y que A está acotado inferiormente).

• Falta probar que A no tiene elemento mínimo.

$$\text{P.D. } -3 \notin A$$

Supongamos que $-3 \in A \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-3 = -3 + \frac{7}{n}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{7}{n} \Rightarrow 0n = 7 \Rightarrow 0 = 7! \\ +3$$

$$\therefore -3 \notin A, \text{ es decir, } \inf(A) \notin A.$$

Por el Teorema 2-ii) deducimos que A no tiene elemento mínimo.