

Definiciones:

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$. Decimos que

- z es una cota superior de A si $\forall a \in A \quad a \leq z$

- z es elemento máximo de A ($z = \max(A)$) si:

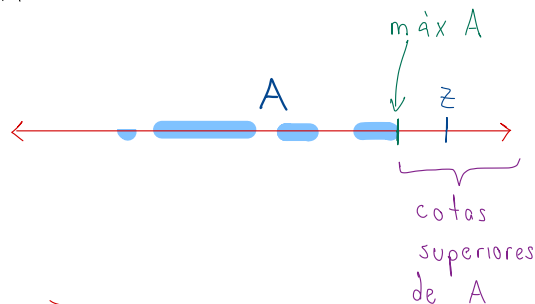
i) $z \in A$ y

ii) z es cota superior de A .

- z es el supremo de A ($z = \sup(A)$) si

i) z es cota superior de A y

ii) si β es cota superior de A , entonces $z \leq \beta$.



z es la mínima cota superior de A

$$A = [2, 8] \Rightarrow \max(A) = 8 \quad \text{y} \quad \sup(A) = 8$$

$$B = [2, 8) \Rightarrow B \text{ no tiene elemento máximo y } \sup(B) = 8$$

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$. Decimos que

- z es una cota inferior de A si $\forall a \in A \quad z \leq a$

- z es elemento mínimo de A ($z = \min(A)$) si:

i) $z \in A$ y

ii) z es cota inferior de A .

- z es el ínfimo de A ($z = \inf(A)$) si

i) z es cota inferior de A y

ii) si β es cota inferior de A , entonces $\beta \leq z$



z es la máxima cota inferior de A .

$$A = [2, 8] \Rightarrow \min(A) = 2 \quad \text{e} \quad \inf(A) = 2$$

$$B = (2, 8) \Rightarrow B \text{ no tiene elemento mínimo e } \inf(B) = 2.$$

Teorema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente.

- 1) Si A tiene elemento máximo, entonces $\sup(A) = \max(A)$.
- 2) Si $\sup(A) \notin A$, entonces A no tiene elemento máximo.
- 3) $\sup(A) \in A \Leftrightarrow A$ tiene elemento máximo.

Teorema. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente.

- 1) Si A tiene elemento mínimo, entonces $\inf(A) = \min(A)$.
- 2) Si $\inf(A) \notin A$, entonces A no tiene elemento mínimo.
- 3) $\inf(A) \in A \Leftrightarrow A$ tiene elemento mínimo.

Demostración.

- 1) Si A tiene elemento mínimo, entonces $\inf(A) = \min(A)$.

Sea $m = \min(A)$. Entonces i) $m \in A$ y

ii) $\forall a \in A \quad m \leq a$ (m es cota inferior de A).

Veamos que $\inf(A) = m$.

P.D. I) m es cota inferior de A

II) si β es cota inferior de A , entonces $\beta \leq m$
(m es la máxima cota inferior de A)

Debida a ii) sabemos que m es cota inferior de A .

Sea β una cota inferior de A (P.D. $\beta \leq m$)

$\Rightarrow \forall a \in A \quad \beta \leq a$. Como $m \in A \Rightarrow \beta \leq m$.

Concluimos que $m = \inf(A)$, es decir, $\min(A) = \inf(A)$.

2). Si $\inf(A) \notin A$, entonces A no tiene elemento mínimo

(Contrapuesta)

P.D. Si A tiene elemento mínimo, entonces $\inf(A) \in A$.

Sup. que A tiene elemento mínimo $\Rightarrow \min(A) = \inf(A)$.

Como $\min(A) \in A \Rightarrow \inf(A) \in A$.

3) $\inf(A) \in A \Leftrightarrow A$ tiene elemento mínimo.

$\Leftarrow$] $\checkmark$

$\Rightarrow$] Supongamos que $\inf(A) \in A$. Como $\inf(A)$ es cota inferior de A
y además $\inf(A) \in A \Rightarrow \min(A) = \inf(A)$.
 $\therefore A$ tiene elemento mínimo.